

EPRI14 – Metrologia

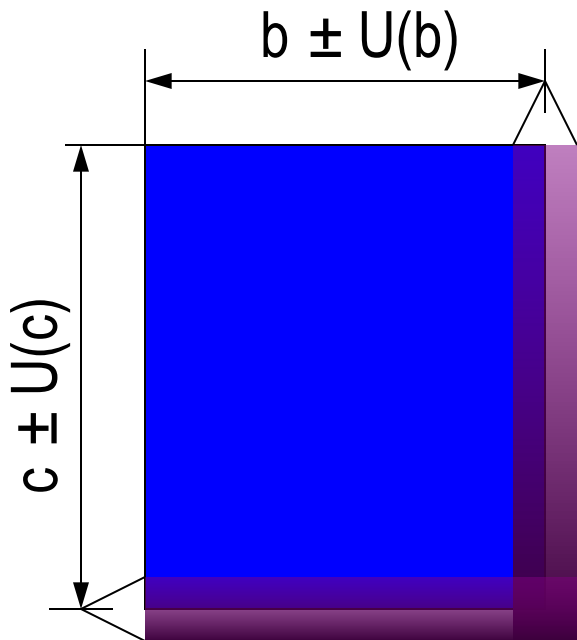
09

Medição indireta





Motivação – Cálculo da Incerteza (U)



- **Como estimar a incerteza (U) do valor de uma grandeza que é calculada a partir de operações matemáticas com os resultados de outras grandezas medidas?**

$$A = b \cdot c$$

$$U(A) = ?$$



Considerações Preliminares



Medições indireta

- O valor do mensurando é determinado a partir de operações matemáticas envolvendo resultados de duas ou mais grandezas de entrada medidas separadamente.
- Exemplos:
 - A área (A) de um terreno calculada pelo produto entre sua largura (L) pelo seu comprimento (C).
$$A = L \cdot C$$
 - Determinação da corrente elétrica (I) dividindo a queda de tensão (V) sobre um resistor pelo valor da sua resistência (R). $I = \frac{V}{R}$



O modelo matemático

- É necessário um modelo matemático que relacione as grandezas de entrada com o valor do mensurando.
- Exemplos:
 - $A = b \cdot h$ (Área = base vezes altura)
 - $V = d / t$ (Velocidade = distância dividida pelo tempo)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Dependência estatística & correlação

- **Duas variáveis aleatórias são consideradas estatisticamente independentes ou não correlacionadas se as variações aleatórias da primeira não guardam nenhum tipo de sincronismo com as da segunda.**
- **Exemplo:**
 - **a temperatura da água do mar na praia da Joaquina e a cotação do dólar.**



Dependência estatística

- Duas variáveis aleatórias são consideradas estatisticamente dependentes ou correlacionadas se as variações aleatórias da primeira ocorrem de forma sincronizada com as variações aleatórias da segunda.
- Exemplos:
 - Os valores em Real da cotação do Euro e do Dólar (na verdade quem mais muda é o Real).
 - A temperatura da água do mar em duas praias próximas.



Dependência estatística

- A grande maioria dos casos de interesse prático da engenharia é suficientemente bem modelada considerando medições como variáveis aleatórias independentes ou não correlacionadas.



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Relembrando...

- as variações aleatórias da primeira não guardam nenhum tipo de sincronismo com as da segunda.
- Exemplo:
 - a temperatura da água do mar na praia da Joaquina e a cotação do dólar.



Adição e subtração de MNC (Medições não Correlacionadas)

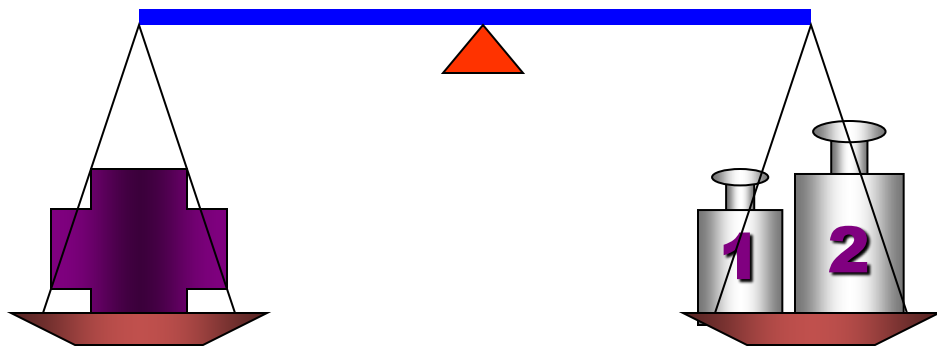
- O quadrado da incerteza (u) combinada da adição ou subtração de MNC é calculado pela soma dos quadrados das incertezas padrão de cada termo:

$$[u(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n)]^2 = [u(X_1)]^2 + [u(X_2)]^2 + \dots + [u(X_n)]^2$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 1: Adição de MNC (Medições não Correlacionadas)



$$m_T = m_1 + m_2$$

MNC

$$[U(m_T)]^2 = [U(m_1)]^2 + [U(m_2)]^2$$

$$[U(m_T)]^2 = [6]^2 + [8]^2 = 100$$

$$U(m_T) = 10 \text{ g}$$

$$m_T = (3000 \pm 10) \text{ g}$$

$$m_1 = (1000 \pm 6) \text{ g}$$

$$m_2 = (2000 \pm 8) \text{ g}$$

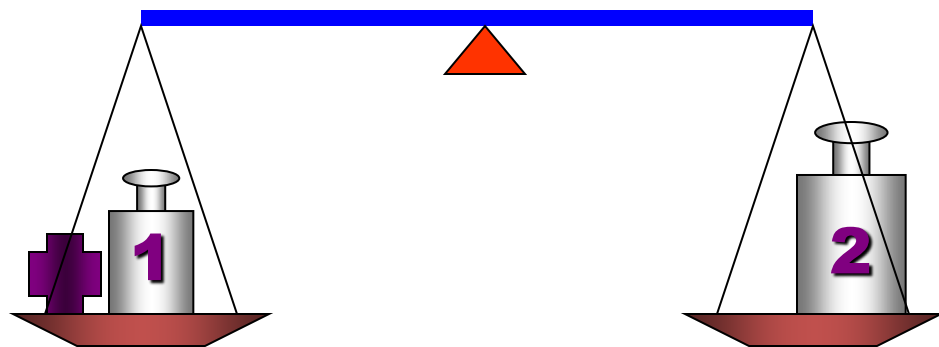
$$U(m_1) = 6 \text{ g}$$

$$U(m_2) = 8 \text{ g}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 2: Subtração de MNC (Medições não Correlacionadas)



$$m_c = m_2 - m_1$$

MNC

$$[U(m_c)]^2 = [U(m_1)]^2 + [U(m_2)]^2$$

$$[u(m_c)]^2 = [6]^2 + [8]^2 = 100$$

$$U(m_c) = 10 \text{ g}$$

$$m_1 = (1000 \pm 6) \text{ g}$$

$$m_2 = (2000 \pm 8) \text{ g}$$

$$m_c + m_1 = m_2$$

$$m_c = (1000 \pm 10) \text{ g}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Multiplicação de MNC (Medições não Correlacionadas)

- Na multiplicação de MNC o quadrado da incerteza combinada relativa é calculado pela soma dos quadrados das incertezas padrão relativas de cada fator:

$$\left[\frac{u(X_1 \cdot X_2)}{X_1 \cdot X_2} \right]^2 = \left[\frac{u(X_1)}{X_1} \right]^2 + \left[\frac{u(X_2)}{X_2} \right]^2$$

$$u_R^2(X_1 \cdot X_2) = u_R^2(X_1) + u_R^2(X_2)$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Multiplicação de MNC (Medições não Correlacionadas)

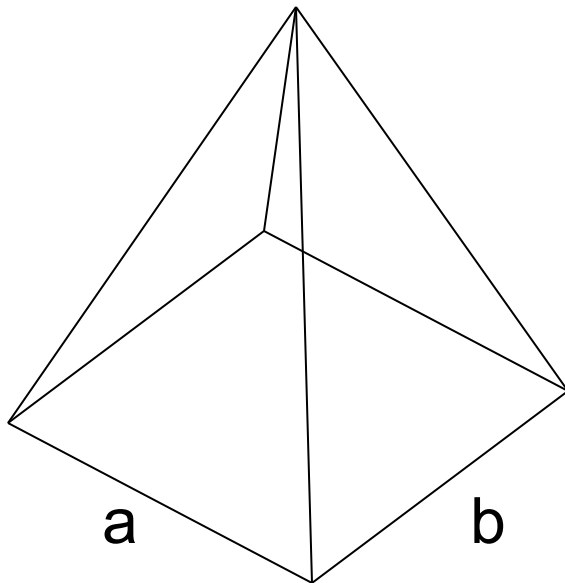
■ Generalizando:

$$u_R^2(X_1^{\pm 1} \cdot X_2^{\pm 1} \cdots X_n^{\pm 1}) = u_R^2(X_1) + u_R^2(X_2) + \cdots + u_R^2(X_n)$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 3: Multiplicação



$$V = \frac{a \cdot b \cdot h}{3}$$

Determine o volume de uma pirâmide com base retangular, cujas dimensões estão especificadas na figura, e altura

$$h = (200,0 \pm 1,0) \text{ mm.}$$

$$a = (100,0 \pm 0,8) \text{ mm}$$

$$b = (90,0 \pm 0,6) \text{ mm}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 3: Multiplicação

Cálculo do volume:

$$\begin{aligned} h &= (200,0 \pm 1,0) \text{ mm} & b &= (90,0 \pm 0,6) \text{ mm} \\ a &= (100,0 \pm 0,8) \text{ mm} \end{aligned}$$

$$V = \frac{a \cdot b \cdot h}{3} \quad V = \frac{100 \cdot 90 \cdot 200}{3} = 600000 = 600 \times 10^3 [\text{mm}^3]$$

Incerteza do volume:

$$\left[\frac{U(V)}{V} \right]^2 = \left[\frac{U(a)}{a} \right]^2 + \left[\frac{U(b)}{b} \right]^2 + \left[\frac{U(h)}{h} \right]^2$$

$$\left[\frac{U(V)}{600000} \right]^2 = \left[\frac{0,8}{100} \right]^2 + \left[\frac{0,6}{90} \right]^2 + \left[\frac{1,0}{200} \right]^2$$

$$\left[\frac{U(V)}{600000} \right]^2 = (64 + 44 + 25) \cdot 10^{-6}$$

$$U(V) = 6931 \text{ mm}^3$$

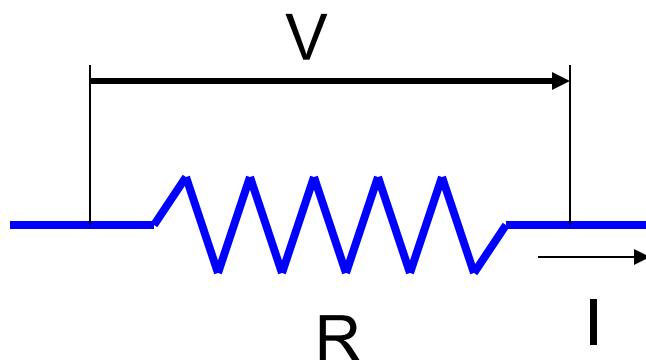


$$V = (600,0 \pm 6,9) 10^3 [\text{mm}^3]$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 4: Divisão de MNC



$$I = \frac{V}{R}$$

Determine a corrente elétrica I [A] que passa por um resistor de $(500,0 \pm 1,0)$ [Ω] sobre o qual foi medida uma queda de tensão de $(150,0 \pm 3,0)$ [V].

Incertezas (U) de R e V:

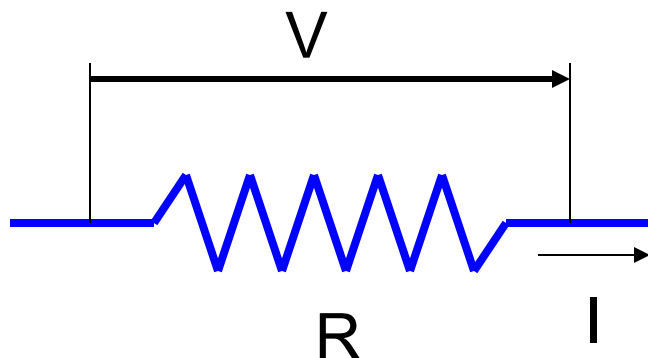
$$U(R) = 1,0 \text{ } [\Omega]$$

$$U(V) = 3,0 \text{ } [V]$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Exemplo 4: Divisão de MNC



$$V = (150,0 \pm 3,0) [\text{V}]$$

$$R = (500,0 \pm 1,0) [\Omega]$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{150}{500} = 0,300 [\text{A}]$$

Incertezas (U):

$$\left[\frac{U(I)}{I} \right]^2 = \left[\frac{U(V)}{V} \right]^2 + \left[\frac{U(R)}{R} \right]^2$$

$$\left[\frac{U(I)}{0,300} \right]^2 = \left[\frac{3,0}{150} \right]^2 + \left[\frac{1,0}{500} \right]^2$$

$$\left[\frac{U(I)}{0,300} \right]^2 = 0,0004 + 0,000004$$

$$U(I) = 0,0060 [\text{A}]$$

$$I = (300 \pm 6) [\text{mA}]$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Caso Geral de MNC

$$G = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Incertezas (u):

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} u(X_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} u(X_2) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} u(X_n) \right)^2$$

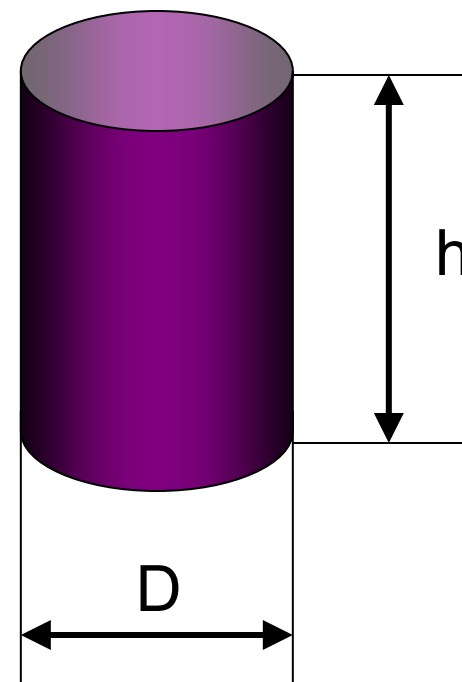
$\frac{\partial f}{\partial X_i}$ = **coeficiente de sensibilidade**

Podem ser calculados analítica ou numericamente



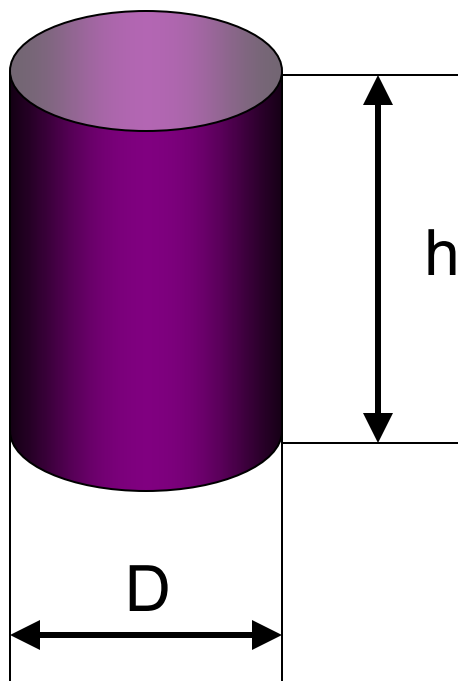
Exemplo: Caso Geral de MNC (Medições não Correlacionadas)

- Na determinação da massa específica (ρ) de um material usou-se um processo indireto, medindo-se em um laboratório, com uma balança, a massa (m) de um cilindro cujo diâmetro (D) e altura (h) foram determinados por um micrômetro e um paquímetro, respectivamente. Após a compensação dos erros sistemáticos, foram encontrados os seguintes resultados:





Medições Realizadas



Para a massa:

$$m = (1580 \pm 20) \text{ g}$$

Para o diâmetro:

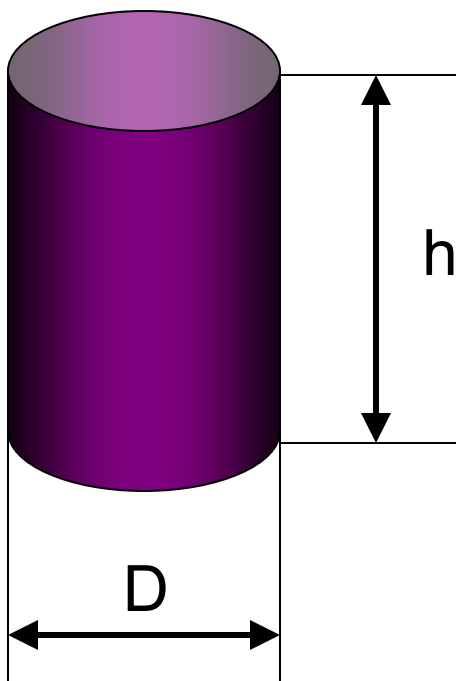
$$D = (25,423 \pm 0,006) \text{ mm}$$

Para a altura:

$$h = (77,35 \pm 0,10) \text{ mm}$$



Massa Específica



Para a massa:

$$m = (1580 \pm 20) \text{ g}$$

Para o diâmetro:

$$D = (25,423 \pm 0,006) \text{ mm}$$

Para a altura:

$$h = (77,35 \pm 0,10) \text{ mm}$$

$$\rho = f(m, D, h)$$

$$\rho = \frac{m}{Vol}$$

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot h}{4}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Cálculo da incerteza (U) combinada

$$\rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot D^2 \cdot h}$$

$$U^2(\rho) = \left(\frac{\partial f}{\partial m} U(m) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial D} U(D) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h} U(h) \right)^2$$

$$U^2(\rho) = \left(\frac{4}{\pi D^2 h} U(m) \right)^2 + \left(\frac{-8m}{\pi D^3 h} U(D) \right)^2 + \left(\frac{-4m}{\pi D^2 h^2} U(h) \right)^2$$

Dividindo tudo por $\rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot D^2 \cdot h}$ e simplificando, tem-se:

$$\left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 = \left(\frac{U(m)}{m} \right)^2 + \left(-2 \frac{U(D)}{D} \right)^2 + \left(\frac{-U(h)}{h} \right)^2$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Cálculo da incerteza (U) combinada

$$\left(\frac{U(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(-2\frac{U(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{-U(h)}{h}\right)^2$$

$$\left(\frac{U(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(2\frac{U(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{U(h)}{h}\right)^2$$

$$\left(\frac{U(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{20}{1580}\right)^2 + \left(2\frac{0,0060}{25,423}\right)^2 + \left(\frac{0,10}{77,35}\right)^2$$

$$U_{Resultante}^2(\rho) = \left(\frac{U(\rho)}{\rho}\right)^2 = (16023,2 + 22,28 + 167,2) \cdot 10^{-8} = 16.212,8 \times 10^{-8}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Cálculo da incerteza (U) combinada

Cálculo do valor da massa específica ρ :

$$\begin{aligned}\rho &= (4 \cdot m) / (\pi \cdot D^2 \cdot h) = (4 \cdot 1580) / (3,14159 \cdot (25,423)^2 \cdot 77,35) \\ &= 0,040239 \left[\frac{g}{mm^3} \right]\end{aligned}$$

Cálculo do valor da incerteza $U(\rho)$ da massa específica ρ :

$$\begin{aligned}U_{Resultante}^2(\rho) &= \left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 = \rho \cdot \sqrt{U_{Resultante}(\rho)} \\ &= 0,040239 \left[\frac{g}{mm^3} \right] \cdot \sqrt{16.212,8 \times 10^{-8}} = 0.0005124 \left[\frac{g}{mm^3} \right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho = (0,04024 \pm 0,00051) \left[\frac{g}{mm^3} \right]}$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Cálculo da incerteza (U) combinada

Soma e subtração de incertezas

$$[u(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n)]^2 = [u(X_1)]^2 + [u(X_2)]^2 + \dots + [u(X_n)]^2$$

Multiplicação e divisão de incertezas

$$\left[\frac{u(X_1 \cdot X_2)}{X_1 \cdot X_2} \right]^2 = \left[\frac{u(X_1)}{X_1} \right]^2 + \left[\frac{u(X_2)}{X_2} \right]^2$$

Caso particular para duas variáveis

$$u_R^2(X_1 \cdot X_2) = u_R^2(X_1) + u_R^2(X_2)$$

$$u_R^2(X_1/X_2) = u_R^2(X_1) + u_R^2(X_2)$$

Caso particular para N variáveis

$$u_R^2(X_1^{\pm 1} \cdot X_2^{\pm 1} \dots X_n^{\pm 1}) = u_R^2(X_1) + u_R^2(X_2) + \dots + u_R^2(X_n)$$

C a s o g e r a l

$$G = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} u(X_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} u(X_2) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} u(X_n) \right)^2$$



Estimativa da Incerteza Combinada em Medições não Correlacionadas (MNC)

Cálculo da incerteza (U) combinada

1. Calcule a resistência R e sua incerteza em $[\Omega]$ de um condutor de seção reta circular de alumínio cujo o comprimento l é 2,0 [m] e o diâmetro D de 2,0 [mm] (= 0,002 [m]), sendo que as incertezas determinadas são de $U(l) = 0,01$ [m] e $U(D) = 0,01$ [mm] (= 0,00001 [m]), respectivamente:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{4 \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot D^2}$$

Sendo ρ do alumínio é $2,825 \times 10^{-6}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$] (= $2,825 \times 10^{-8}$ [$\Omega \cdot \text{m}$]) e sua incerteza $0,014 \times 10^{-6}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$] (= $0,014 \times 10^{-8}$ [$\Omega \cdot \text{m}$])

Aplicando o caso geral:

$$u^2(R) = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} u(\rho) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l} u(l) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial A} u(A) \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} u(\rho) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l} u(l) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial D} u(D) \right)^2$$

$$u^2(R) = \left(\frac{4 l}{\pi D^2} u(\rho) \right)^2 + \left(\frac{4 \rho}{\pi D^2} u(l) \right)^2 + \left(\frac{-8 \rho l}{\pi D^3} u(D) \right)^2$$

Dividindo tudo por $R = \rho \frac{l}{A} = \frac{4 \rho l}{\pi D^2}$ e simplificando, tem-se:

$$\left(\frac{U(R)}{R} \right)^2 = \left[\left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{U(l)}{l} \right)^2 + \left(-2 \times \frac{U(D)}{D} \right)^2 \right]$$

$$\left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 = \left(\frac{0,014 \times 10^{-8}}{2,825 \times 10^{-8}} \right)^2 = 0,000025 = 2,455947\text{E-}5 \quad (1)$$

$$\left(\frac{U(l)}{l} \right)^2 = \left(\frac{0,01}{2,0} \right)^2 = 0,000025 = 2,5\text{E-}5 \quad (2)$$

$$\left(-2 \times \frac{U(D)}{D} \right)^2 = \left(-2 \times \frac{0,00001}{0,002} \right)^2 = 0,000100 = 1,0\text{E-}4 \quad (3)$$

Cálculo de $R = \rho \frac{l}{A} = \frac{4 \rho l}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2,825 \times 10^{-8} \times 2,0}{\pi \times 0,002^2}$

$$R = 1,798451\text{E-}2 [\Omega] = 0,0179845 [\Omega]$$

$$\left(\frac{U(R)}{R} \right)^2 = \underbrace{0,000025}_{(1)} + \underbrace{0,000025}_{(2)} + \underbrace{0,000100}_{(3)}$$

$$\frac{U(R)}{R} = 1,22474487\text{E-}2$$

$$U(R) = 2,2026434\text{E-}4 [\Omega] = 0,00022 [\Omega]$$

$$\text{RM} = (0,01798 \pm 0,00022) [\Omega]$$