

EPRI14 – Metrologia

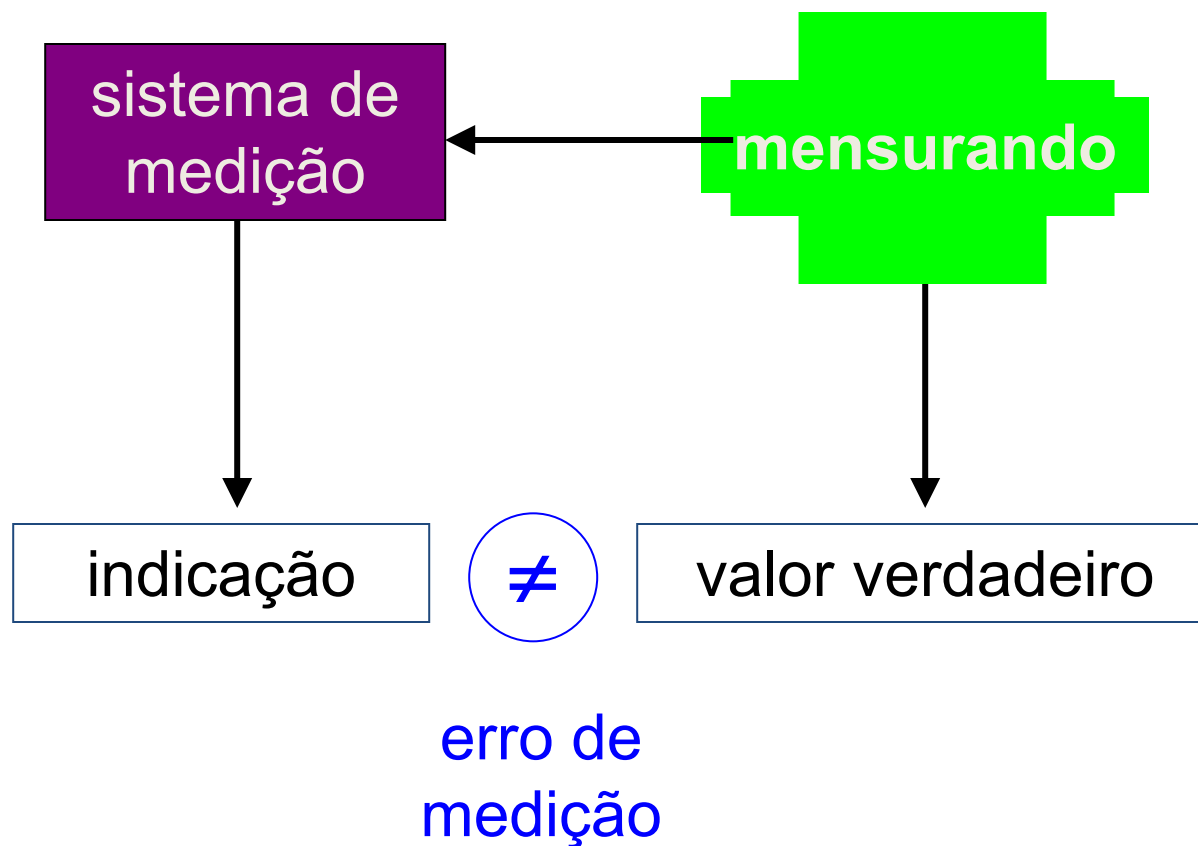
06

O Erro de Medição





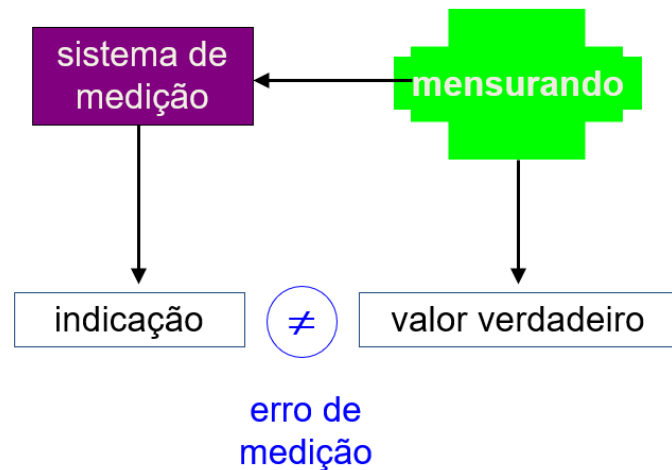
Erro de medição





Erros de Medição

- Erros causados:
 - Pelas imperfeições do sistema de qualidade;
 - Pelas limitações do operador;
 - Pelas influências das condições ambientais.
- Portanto:
 - O erro está presente toda vez que o comportamento real se afasta do ideal.





Tipos de erros

- **Erro sistemático:** é a parcela previsível do erro. Corresponde ao erro médio.
- **Erro aleatório:** é a parcela imprevisível do erro. É o agente que faz com que medições repetidas levem a distintas indicações.



Tipos de erros

- **Erro sistemático:** é a parcela previsível do erro. Corresponde ao erro médio.

◆ Exemplos de erro sistemático

- ➡ *(erro previsível, desloca todas as medições para o mesmo lado)*

- ➡ **Paquímetro descalibrado**

→ Mede sempre **+0,2 mm** a mais, em todas as medições.

- ➡ **Balança com zero errado**

→ Mesmo sem carga, indica **+50 g**.

- ➡ **Termômetro mal calibrado**

→ Marca sempre **2 °C acima** da temperatura real.

- ➡ **Relógio comparador com erro de montagem**

→ Ponta mal posicionada gera sempre o mesmo desvio.

- ➡ **Erro de paralaxe constante**

→ Operador sempre lê a escala de lado, deslocando o valor para cima.

- ➡ 🖐 **Resultado:**

- ➡ Afeta a **exatidão**

- ➡ Pode ser **corrigido** com calibração, ajuste ou correção matemática



Tipos de erros

- **Erro sistemático:** é a parcela previsível do erro. Corresponde ao erro médio.
- ➡ **◆ Exemplos de erro aleatório**
- ➡ *(erro imprevisível, varia a cada medição)*
- ➡ **Repetir a mesma medição com paquímetro**
→ Leituras: 20,02 mm | 20,05 mm | 19,98 mm | 20,01 mm
- ➡ **Leitura de instrumento analógico**
→ Pequenas variações de interpretação da escala a cada leitura.
- ➡ **Influência ambiental variável**
→ Vibração, temperatura ambiente ou corrente de ar mudando durante a medição.
- ➡ **Oscilação elétrica em sensores**
→ Ruído elétrico provoca pequenas flutuações no valor indicado.
- ➡ **Força de contato variável do operador**
→ Apertar mais ou menos o instrumento a cada medição.
- ➡ **👉 Resultado:**
- ➡ Afeta a **precisão**
- ➡ Não pode ser eliminado, apenas **reduzido** com repetição e média



Tipos de erros

- **Erro sistemático:** é a parcela previsível do erro. Corresponde ao erro médio.
- **Erro aleatório:** é a parcela imprevisível do erro. É o agente que faz com que medições repetidas levem a distintas indicações.

Tipo de erro	Comportamento	Afeta	Como tratar
Sistemático	Sempre igual	Exatidão	Calibração / correção
Aleatório	Varia	Precisão	Repetições / média



Exercícios Resolvidos – Erros de Medição

Exercício 1 – Identificação do tipo de erro

Um paquímetro apresenta um erro de $+0,10$ mm em todas as medições realizadas. Ao medir um eixo, o instrumento sempre indica um valor maior que o real.

Pergunta:

Que tipo de erro está presente? Justifique.

Resolução

O erro ocorre **sempre no mesmo sentido e com o mesmo valor**, independentemente da medição realizada.

 Trata-se de um **erro sistemático**, pois é previsível e desloca todas as medições igualmente.



Exercício 2 – Erro aleatório em medições repetidas

Um operador mede cinco vezes o diâmetro de um pino, obtendo os seguintes valores:

- 25,02 mm
- 24,98 mm
- 25,05 mm
- 25,00 mm
- 24,97 mm

Pergunta:

Qual tipo de erro está predominando? Explique.

Resolução

Os valores variam de forma **imprevisível**, para cima e para baixo, em torno de um valor médio.

 Isso caracteriza **erro aleatório**, causado por pequenas variações de leitura, força aplicada, resolução do instrumento ou ambiente.



Exercício 3 – Exatidão × Precisão

Considere duas situações:

- **Situação A:** todas as medições são muito próximas entre si, mas afastadas do valor verdadeiro.
- **Situação B:** as medições estão espalhadas, mas a média coincide com o valor verdadeiro.

Pergunta:

Associe cada situação ao tipo de erro predominante.

Resolução

- **Situação A:** erro sistemático
 - Alta precisão
 - Baixa exatidão

- **Situação B:** erro aleatório
 - Baixa precisão
 - Boa exatidão (em média)



Exercício 4 – Correção de erro sistemático

Uma balança indica 1050 g ao medir uma peça cujo valor real é 1000 g.

Perguntas:

- a) Qual o erro apresentado pela balança?
- b) Que tipo de erro é esse?

Resolução

- a) Erro = $1050 - 1000 = +50 \text{ g}$
- b) Como o erro é constante e previsível, trata-se de **erro sistemático**, normalmente corrigido por calibração.



Exercício 5 – Influência do operador

Dois operadores medem a mesma peça com o mesmo instrumento:

- Operador A: 30,01 | 30,02 | 30,01 mm
- Operador B: 29,95 | 30,08 | 29,98 mm

Pergunta:

Que tipo de erro é evidenciado no operador B?

Resolução

O operador B apresenta grande dispersão nas medições.

 Isso indica **erro aleatório**, provavelmente devido a variação na técnica de medição.



Exercício 6 – Verdadeiro ou Falso (com justificativa)

- a) O erro sistemático pode ser reduzido com a média de várias medições.
- b) O erro aleatório pode ser reduzido aumentando o número de medições.
- c) Um instrumento bem calibrado elimina completamente o erro aleatório.

Resolução

a)  Falso

→ A média não elimina erro sistemático.

b)  Verdadeiro

→ A média reduz o efeito do erro aleatório.

c)  Falso

→ A calibração corrige erro sistemático, não o aleatório.



Exercício 7 – Aplicação prática

Durante uma medição de temperatura, um termopar apresenta oscilações de $\pm 1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ao longo do tempo, mas sua média está correta.

Pergunta:

Que tipo de erro está presente e como tratá-lo?

Resolução

- Tipo de erro: **erro aleatório**
- Tratamento:
 - Repetir medições
 - Utilizar média
 - Melhorar condições ambientais



Tipos de erros (Relembrando...)

- **Erro sistemático:** é a parcela previsível do erro. Corresponde ao erro médio.
- **Erro aleatório:** é a parcela imprevisível do erro. É o agente que faz com que medições repetidas levem a distintas indicações.

Tipo de erro	Comportamento	Afeta	Como tratar
Sistemático	Sempre igual	Exatidão	Calibração / correção
Aleatório	Varia	Precisão	Repetições / média

◆ Resumo

- **Erro sistemático** → desloca o valor → afeta a exatidão
- **Erro aleatório** → espalha os valores → afeta a precisão
- **Média** reduz erro aleatório
- **Calibração** corrige erro sistemático

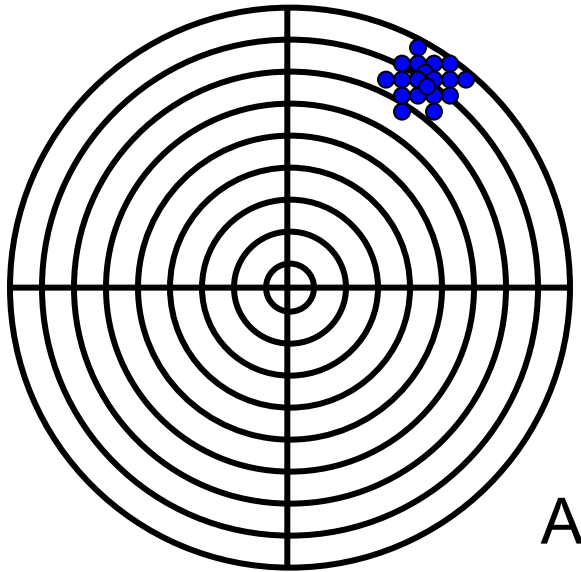


Um exemplo de erros

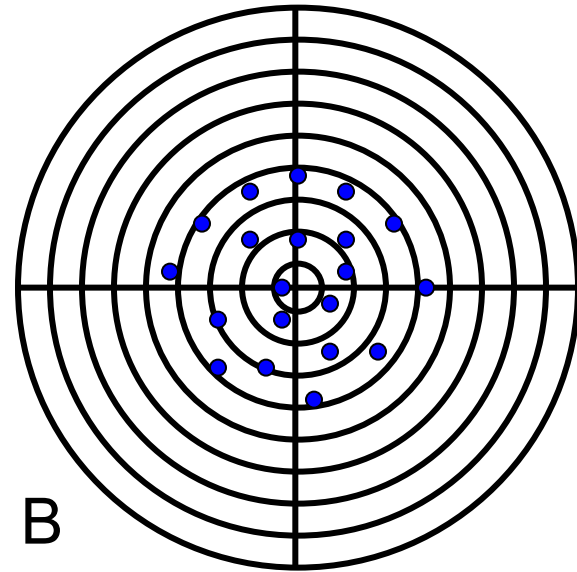
- **Teste de precisão de tiro de canhões:**
 - Canhão situado a 500 m de alvo fixo;
 - Mirar apenas uma vez;
 - Disparar 20 tiros sem nova chance para refazer a mira;
 - Distribuição dos tiros no alvo é usada para qualificar canhões.
- **Quatro concorrentes:**



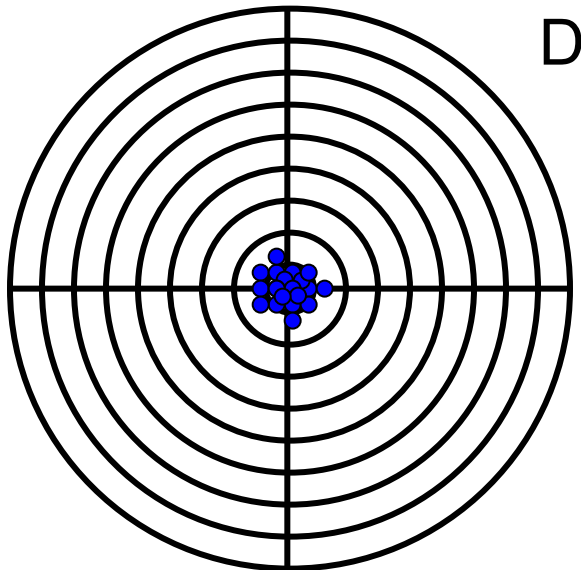
Um exemplo de erros



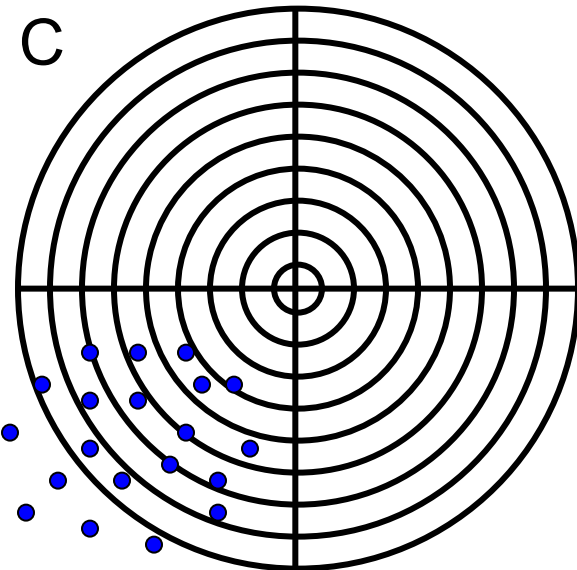
A



B



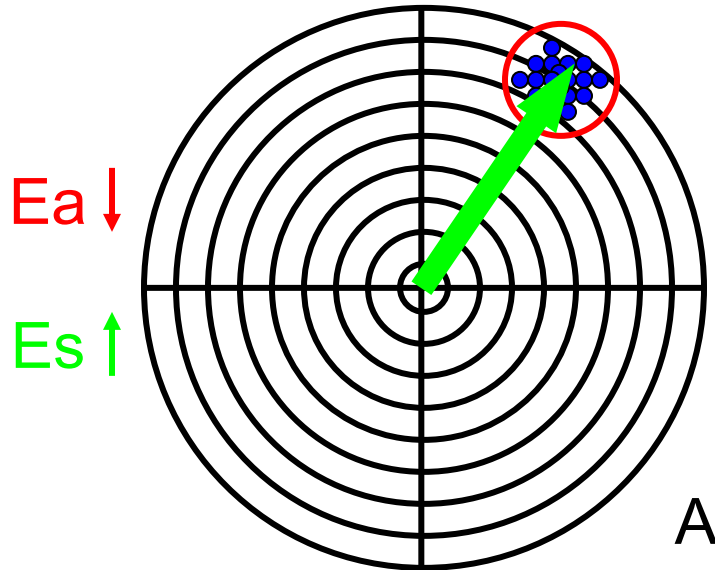
D



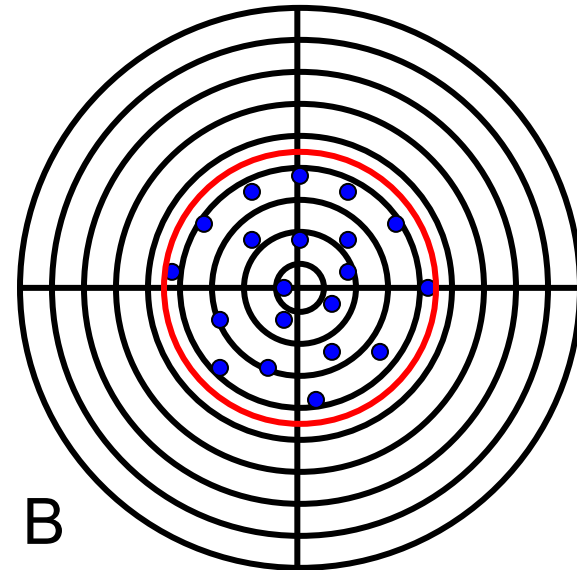
C



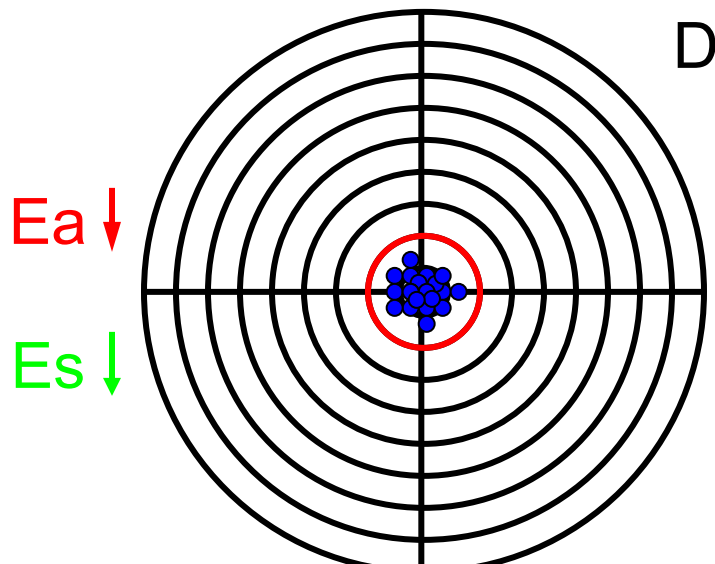
Um exemplo de erros



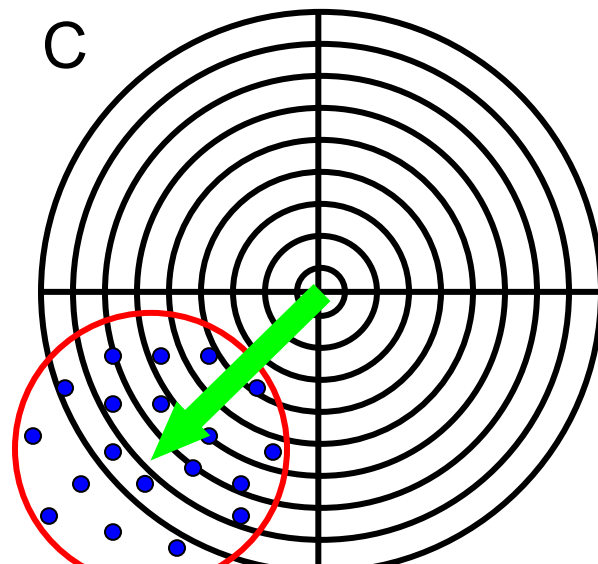
A



B



D



C



Precisão & Exatidão

- Então surge dois novos conceitos:
 - ➡ Exatidão: É a capacidade de um sistema funcionar sem erros;
 - ➡ Precisão: É a capacidade de obter sempre o mesmo resultado quando as repetições são efetuadas;



Precisão & Exatidão

- Portanto:
- Um sistema com ótima precisão repete bem, com pequena dispersão.
- Um sistema com excelente exatidão praticamente não apresenta erros.



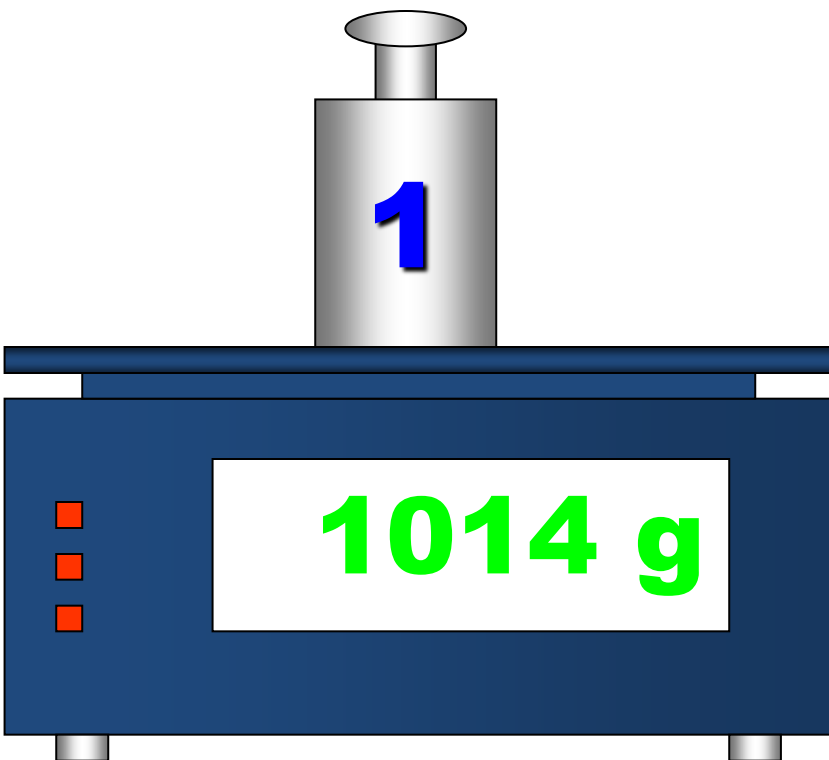
Erros de medição

- Surge um novo conceito: O erro de medição.
- O erro de medição é a diferença entre o valor indicado pelo sistema de medição e o valor verdadeiro do mensurando.



Exemplo de erro de medição

$(1000,00 \pm 0,01) \text{ g}$



$$E = I - VV$$

E = Erro de medição

I = Indicação do Sistema de Medição

VV = Valor Verdadeiro conhecido exatamente

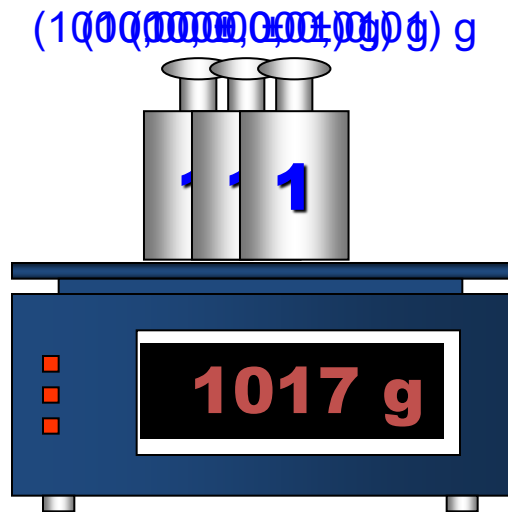
$$E = 1014 - 1000$$

$$E = (+) 14 \text{ g}$$

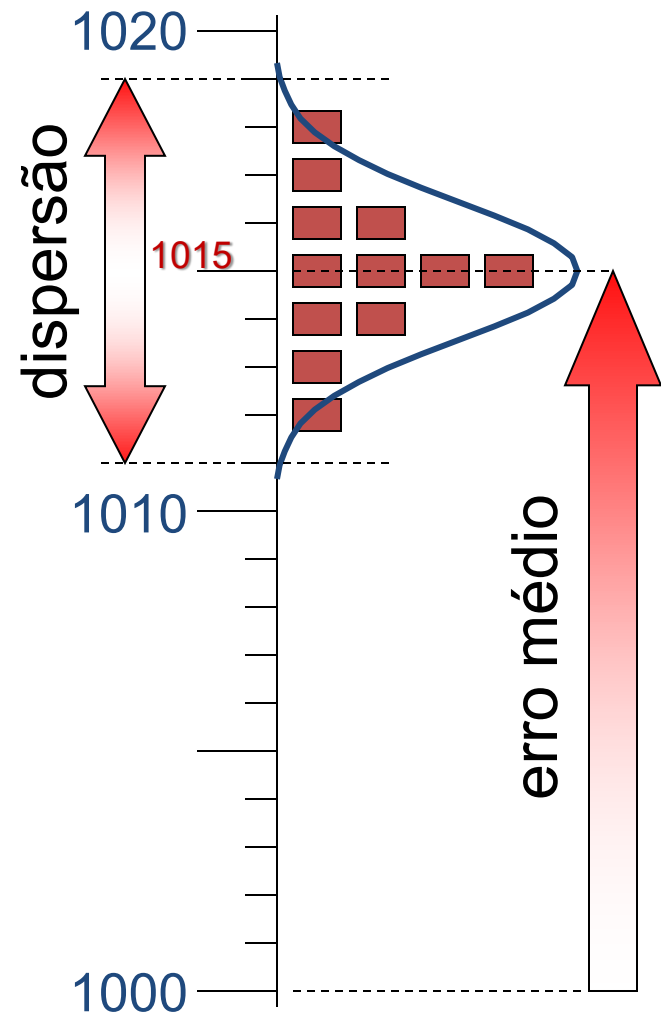
Indica a mais do
que deveria!



Erros em medições repetidas



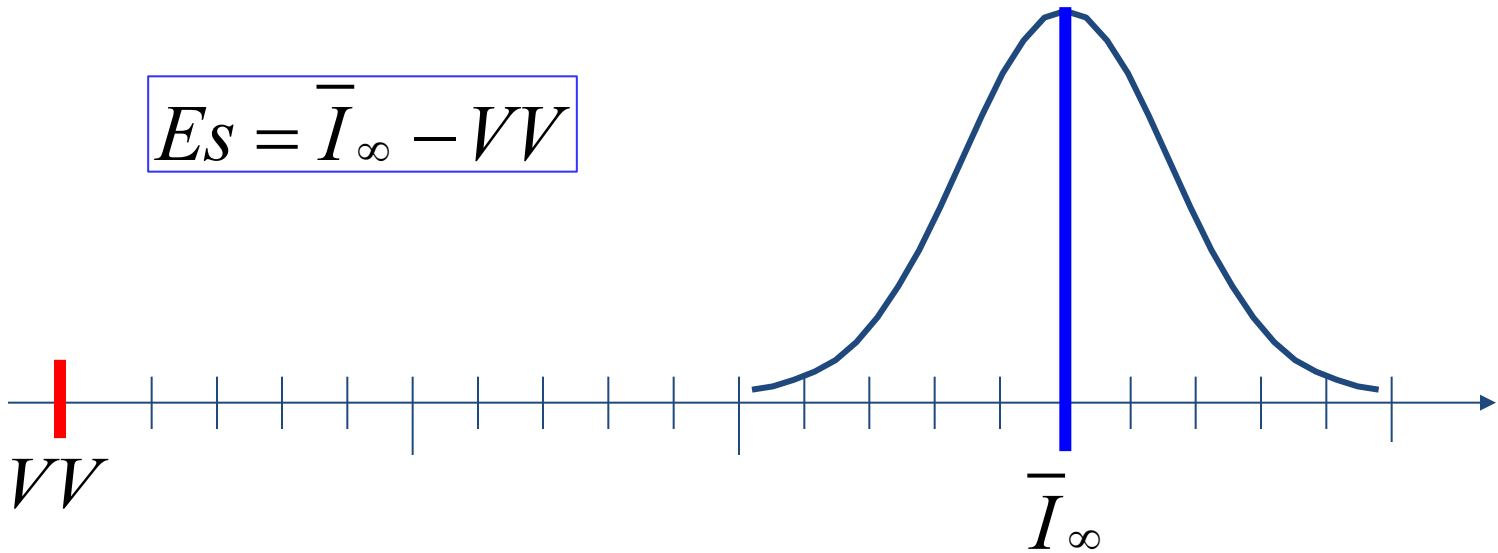
1014 g
1015 g
1017 g
1012 g
1015 g
1018 g
1014 g
1015 g
1016 g
1013 g
1016 g
1015 g





Cálculo de Erro Sistemático (E_s)

$$E_s = \bar{I}_{\infty} - VV$$



$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{\infty} = \text{média de infinitas indicações} \\ VV = \text{Valor verdadeiro conhecido exatamente} \end{array} \right\}$



Definições

- **Tendência (T_d)**
 - é uma estimativa do Erro Sistemático

- **Valor Verdadeiro Convencional (VVC)**
 - é uma estimativa do valor verdadeiro

- **Correção (C)**
 - é a constante que, ao ser adicionada à indicação, compensa os erros sistemáticos
 - é igual à tendência com sinal trocado

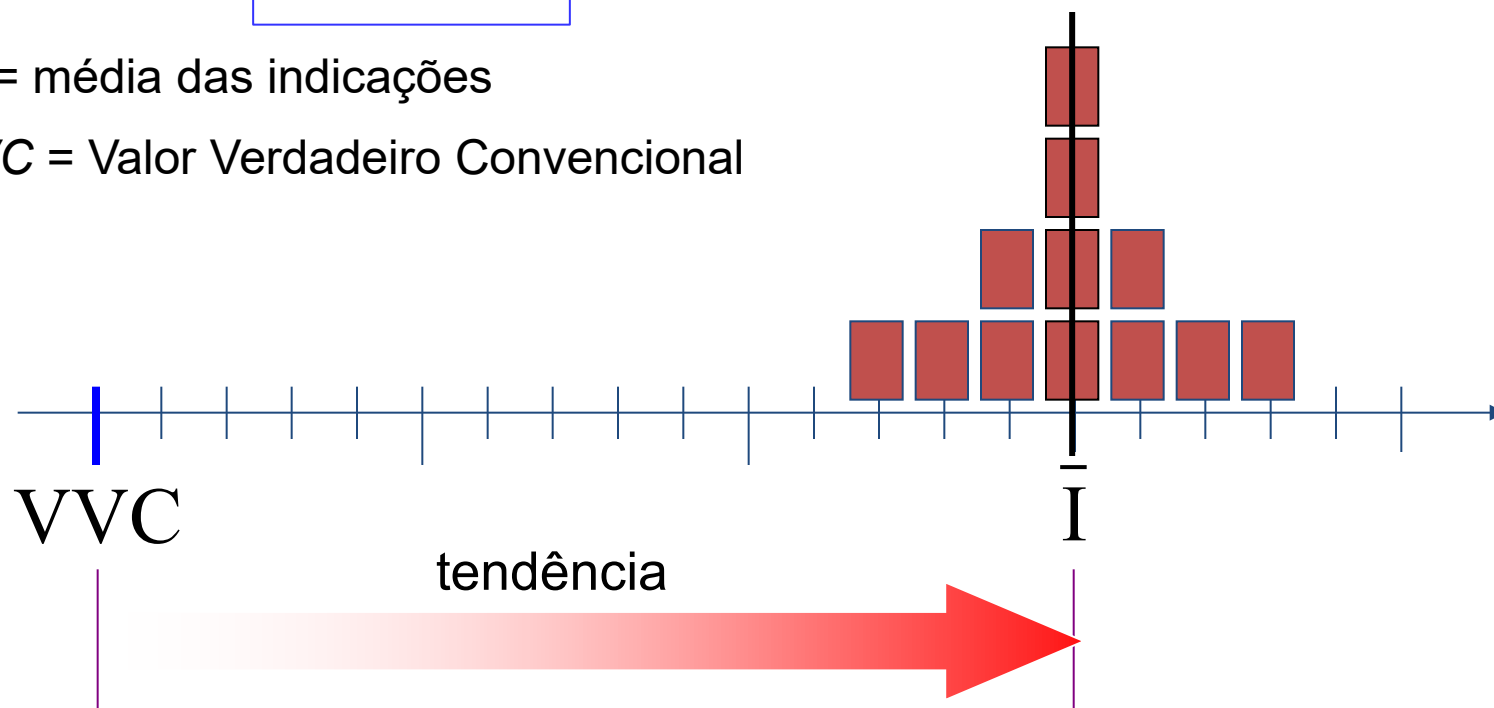


Tendência (T_d) ou Estimativa do erro sistemático

$$Td = \bar{I} - VVC$$

$\bar{I}$ = média das indicações

VVC = Valor Verdadeiro Convencional





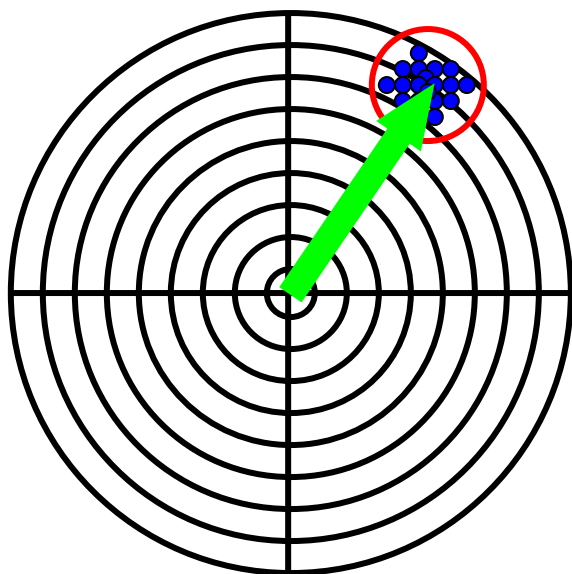
Correção (C) dos erros sistemáticos

$$Td = \bar{I} - VVC$$

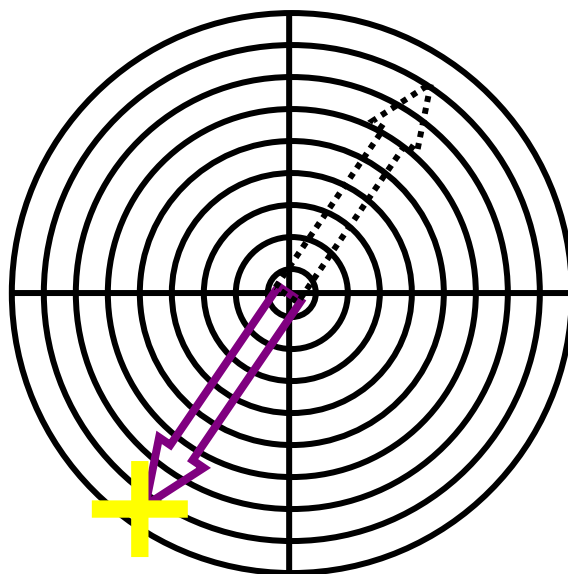
$\bar{I}$ = média das indicações

VVC = Valor Verdadeiro Convencional

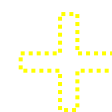
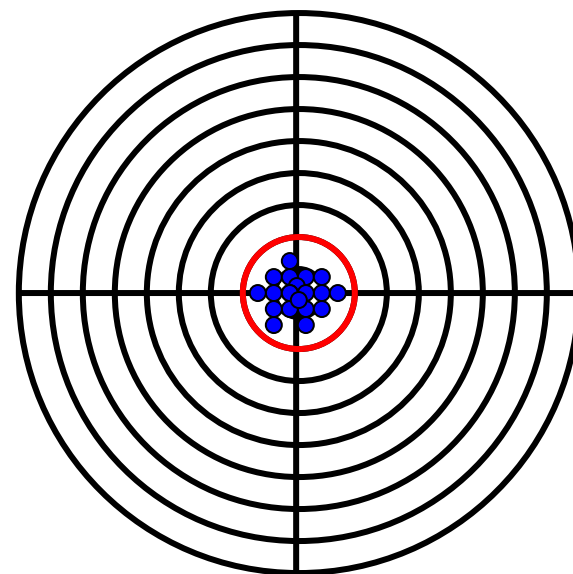
- é a constante que, ao ser adicionada à indicação, compensa os erros sistemáticos
- é igual à tendência com sinal trocado ($C = -T_d$)



T_d



$C = -T_d$





Indicação Corrigida

$$I_c = I + C$$

$$E_a = I - \bar{I}$$

$$Td = \bar{I} - VVC$$

$$C = -Td$$

$$C = VVC - \bar{I}$$

$$C = 1000 - 1015$$

$$C = -15 \text{ g}$$

Onde:

I = Indicação

C = Correção

I_c = Indicação corrigida

E_a = Erro aleatório

Nº	I	C	$I_c = I + C$	$E_a = I - \bar{I}$
1	1014	-15	999	-1
2	1015	-15	1000	0
3	1017	-15	1002	2
4	1012	-15	997	-3
5	1015	-15	1000	0
6	1018	-15	1003	3
7	1014	-15	999	-1
8	1015	-15	1000	0
9	1016	-15	1001	1
10	1013	-15	998	-2
11	1016	-15	1001	1
12	1015	-15	1000	0
média	1015	-15	1000	0

VVC = Valor verdadeiro convencional = **1000 g**

$E_a = I_c - VVC \Rightarrow$ Erro aleatório = indicação corrigida – valor verdadeiro convencional



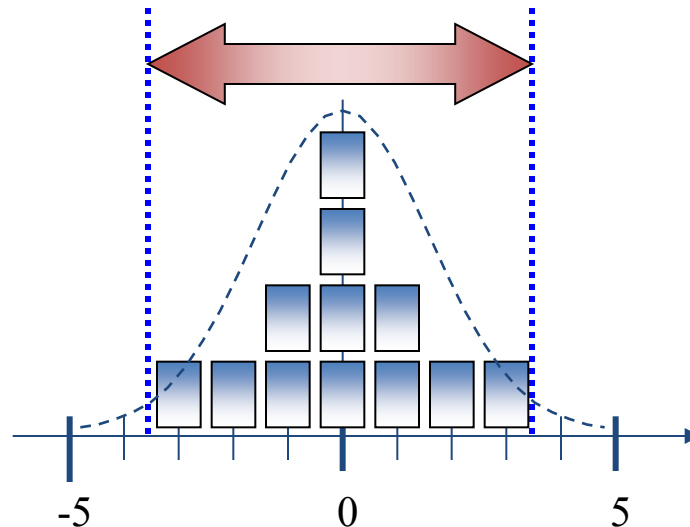
Erro aleatório e repetitividade

$$Ea_i = I_i - \bar{I}$$

$\bar{I}$ = média das indicações

I = indicações

i = medidas



A repetitividade define a faixa dentro da qual espera-se que o erro aleatório esteja contido.

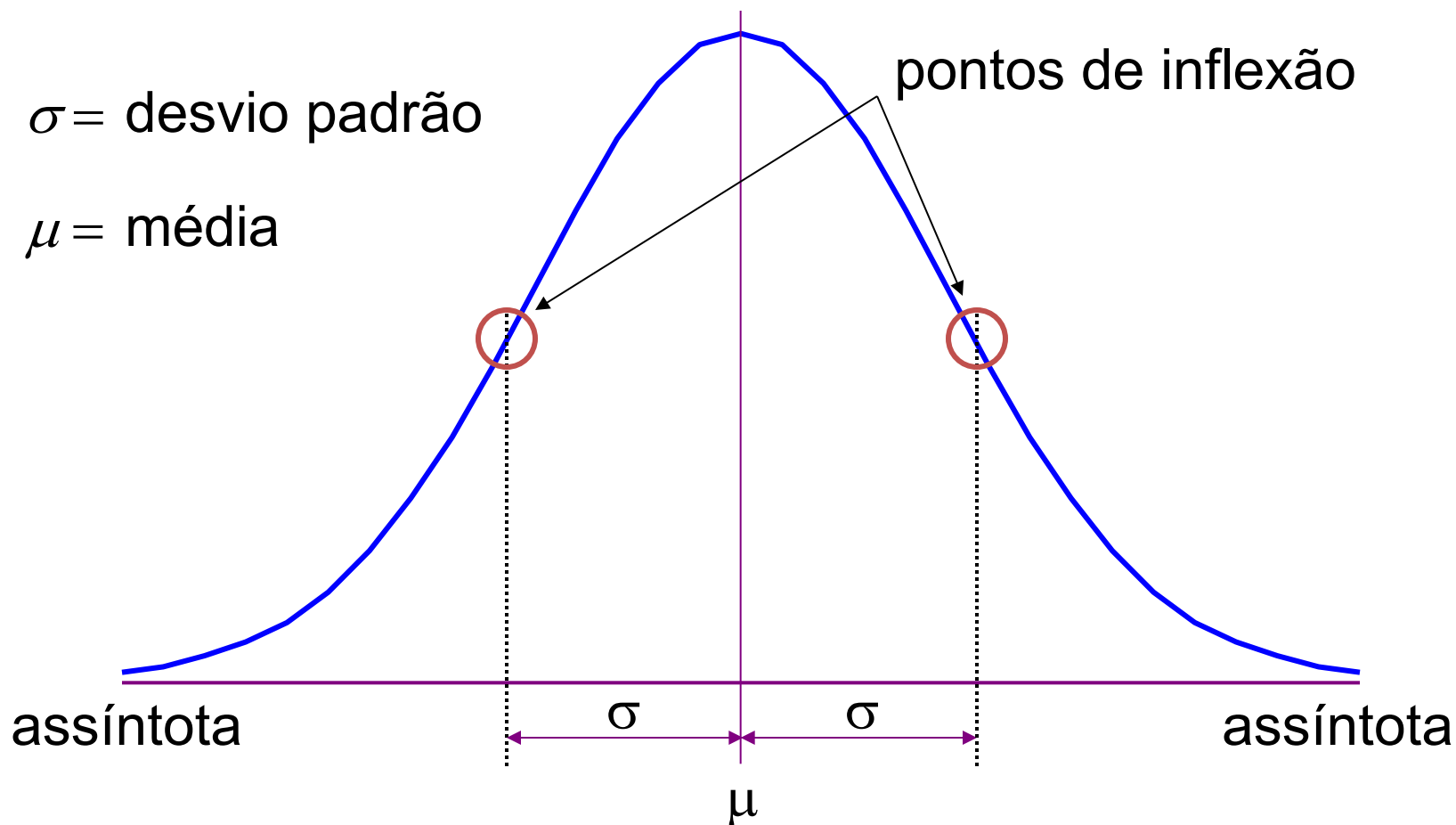


Teorema central do limite

- Quanto mais variáveis aleatórias forem combinadas, tanto mais o comportamento da combinação se aproximará do comportamento de uma distribuição normal (ou gaussiana).



Curva normal



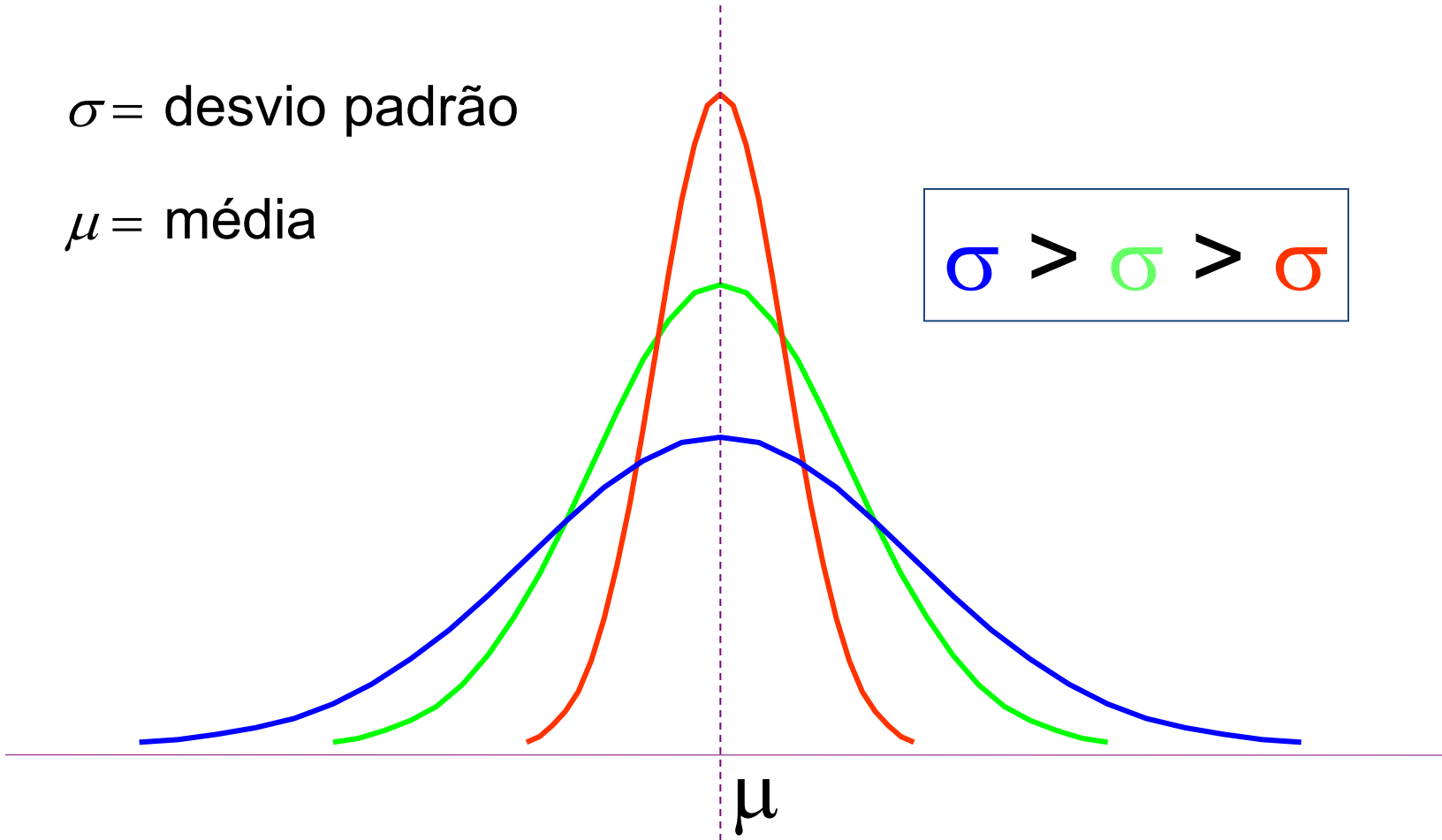


Efeito do desvio padrão

σ = desvio padrão

μ = média

$$\sigma > \sigma > \sigma$$





Cálculo (σ) e estimativa do desvio padrão (s)

cálculo exato:
(da população)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n}}$$

estimativa:
(da amostra)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

I_i

i-ésima indicação

$\bar{I}$

média das " n " indicações

n

número de medições repetitivas efetuadas



Cálculo (σ)

cálculo exato:
(da população)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n}}$$

I_i i-ésima indicação
 $\bar{I}$ média das " n " indicações
 n número de medições repetitivas efetuadas

✓ Quando essa fórmula é correta

- Quando **todas as medições possíveis** da grandeza foram consideradas
- Ou quando o conjunto analisado é a **população inteira**
- Exemplo:
 - Todas as leituras de um ensaio fechado
 - Todos os valores registrados por um sistema em um intervalo finito conhecido

👉 Aqui, **não há incerteza estatística sobre a média**, pois ela é a média populacional.



Cálculo da estimativa do desvio padrão (s)

estimativa:
(da amostra)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

I_i i-ésima indicação

$\bar{I}$ média das " n " indicações

n número de medições repetitivas efetuadas

✓ Quando essa fórmula é correta

- Quando as medições representam **apenas uma amostra**
- A média $\bar{I}$ é **estimada a partir dos próprios dados**
- Aplica-se a **correção de Bessel** ($n - 1$) para evitar viés

👉 Essa é a forma **estatisticamente correta** para estimar a variabilidade real do processo de medição.



Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n-1}}$$

I_i i -ésima indicação

$\bar{I}$ média das " n " indicações

n número de medições repetitivas efetuadas

- u é a medida da intensidade da componente aleatória do erro de medição.
- corresponde à estimativa do desvio padrão da distribuição dos erros de medição.
- $u = s$ (incerteza padrão u é igual ao desvio padrão s)
- Graus de liberdade (ν):
 - ➡ corresponde ao número de medições (n) repetidas menos um.
 - ➡ $\nu = n - 1$

Avaliação Tipo A da Incerteza (GUM)

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

- ➡ Objetivo dos slides:
- ➡ • Entender quando $u = s$
- ➡ • Entender quando $u \neq s$
- ➡ • Evitar erros conceituais em provas e relatórios

Quando $u = s$

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Situação:

- ➡ • Avaliação Tipo A (estatística)
- ➡ • Interesse em uma medição individual
- ➡ • Erros puramente aleatórios

➡ Conclusão:

- ➡ A incerteza padrão (u) é igual ao desvio padrão (s) experimental.

Expressão matemática ($u = s$)

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Desvio padrão experimental:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

➡ Incerteza padrão da medição individual:

➡ $u = s$

Quando $u \neq s$

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Situação:

➡ • Resultado reportado é a média

➡ • Várias medições repetidas

➡ • Mensurando passa a ser $\bar{x}$

➡ A média $\bar{x}$ reduz o efeito dos erros aleatórios.

Expressão matemática ($u \neq s$)

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Incerteza padrão da média:

➡ $u(\bar{x}) = (s / \sqrt{n})$

➡ Para $n > 1$:

➡ $u(\bar{x}) > s$

Resumo comparativo

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Medição individual:

➡ • Mensurando: x_i

➡ • Incerteza: $u = s$

➡ Média das medições:

➡ • Mensurando: $\bar{x}$

➡ • Incerteza: $u = s / \sqrt{n}$

Exercício proposto

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Uma grandeza foi medida 4 vezes (mm):

➡ 25,02 – 25,00 – 25,01 – 24,99

➡ a) Calcule a média

➡ b) Determine o desvio padrão s

➡ c) Calcule a incerteza da média

➡ d) Explique por que $u \neq s$

Solução do exercício

Incerteza padrão (u)

Desvio padrão (s)

➡ Média:

➡ $\bar{x} = 25.005 \text{ mm}$

➡ Desvio padrão:

➡ $s = 0.0129 \text{ mm}$

➡ Incerteza da média:

➡ $u = s / \sqrt{n} = 0.0065 \text{ mm}$, onde $n = 4$ medidas

➡ Conclusão:

➡ $u \neq s$ porque a incerteza está associada à média.

Avaliação Tipo A da Incerteza (GUM)

- ➡ Estes slides tratam especificamente da Avaliação Tipo A da Incerteza, conforme definida no GUM.
- ➡ GUM = *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (Guia para a Expressão da Incerteza de Medição)
- ➡ O GUM é o documento internacional que estabelece as regras para avaliar, combinar e expressar incertezas de medição.

O que é o GUM?

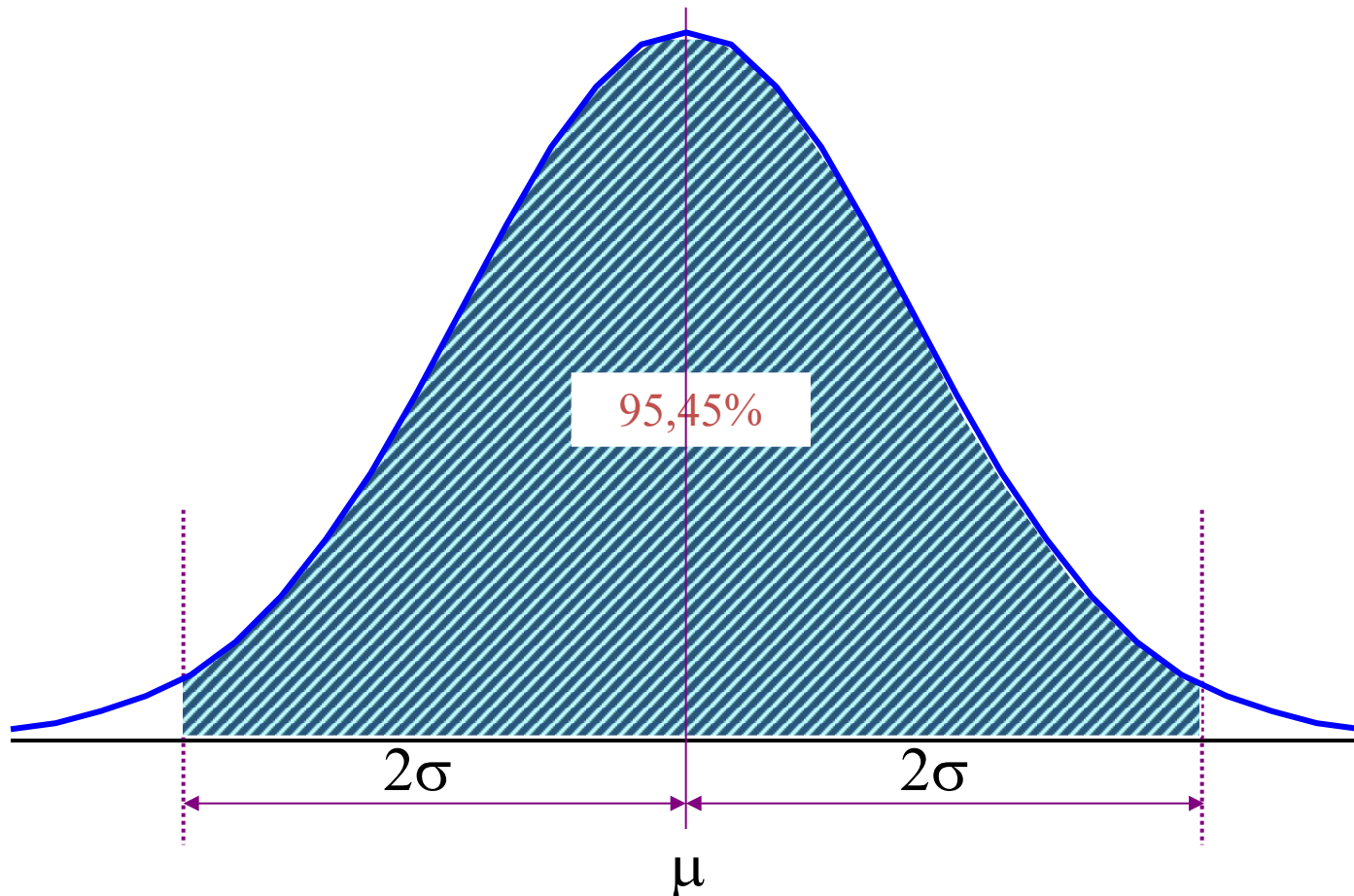
- ➡ O GUM é um guia publicado por organismos internacionais de metrologia (BIPM, ISO, IEC, OIML, entre outros).
- ➡ Ele padroniza:
 - conceitos de erro e incerteza
 - avaliação Tipo A e Tipo B
 - forma correta de expressar resultados de medição
- ➡ Seu uso é obrigatório em laboratórios, relatórios técnicos e trabalhos científicos.



Área sobre a curva normal na Metrologia

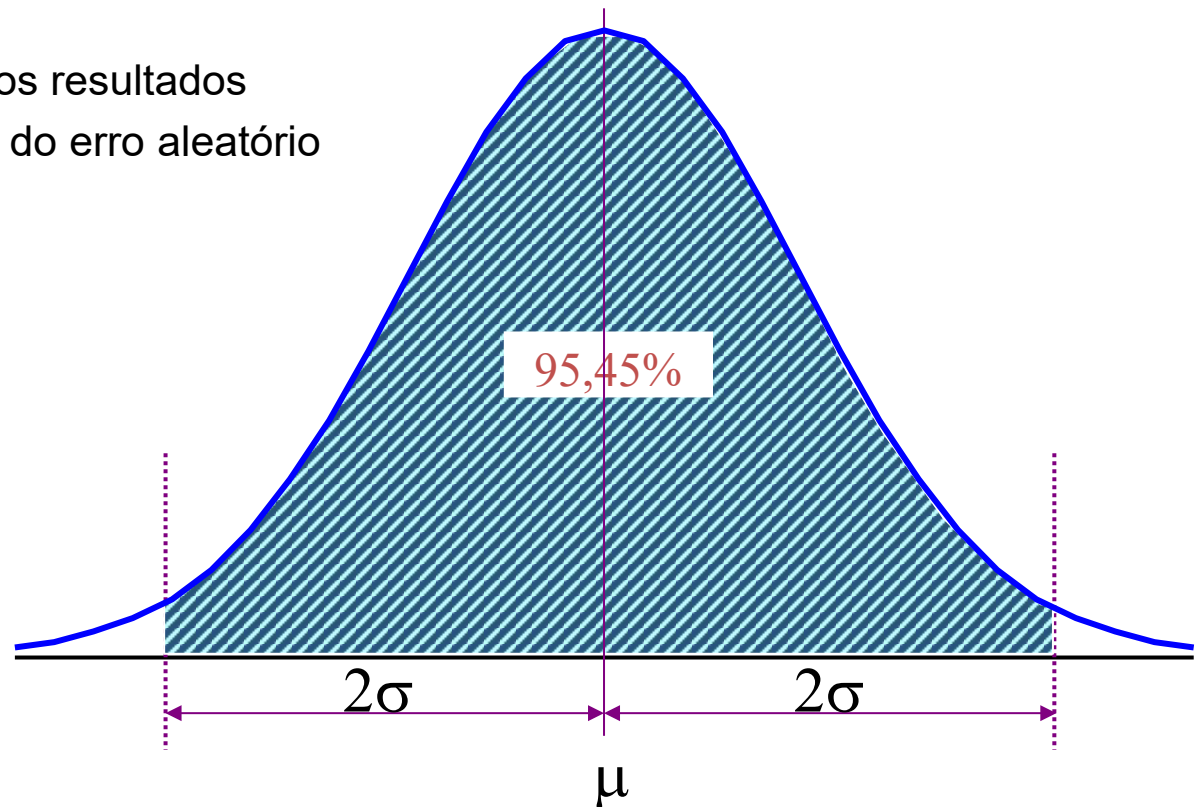
- Aplicação da distribuição normal na avaliação da incerteza
- Base conceitual utilizada no GUM

Distribuição Normal: 95,45% dentro de $\pm 2\sigma$



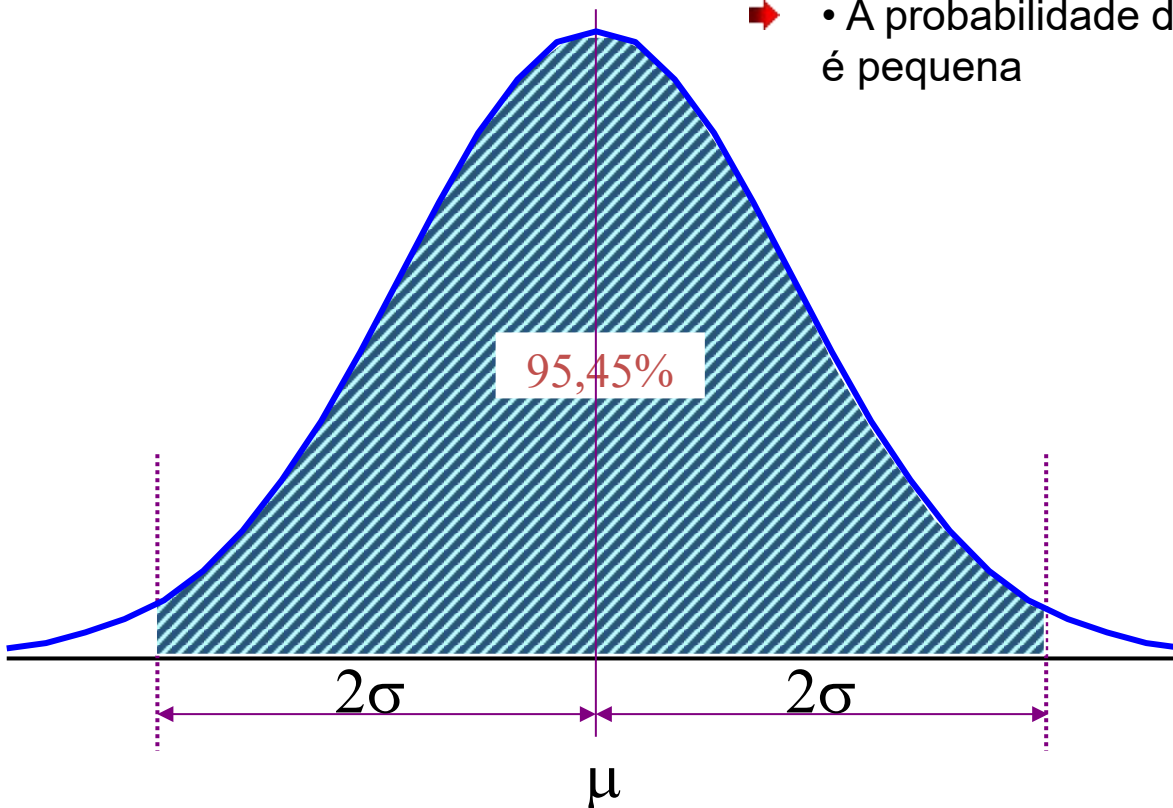
Significado de μ e σ

- ➡ μ (média):
 - Melhor estimativa da grandeza medida
 - Centro da distribuição
- ➡ σ (desvio padrão):
 - Mede a dispersão dos resultados
 - Indica a intensidade do erro aleatório



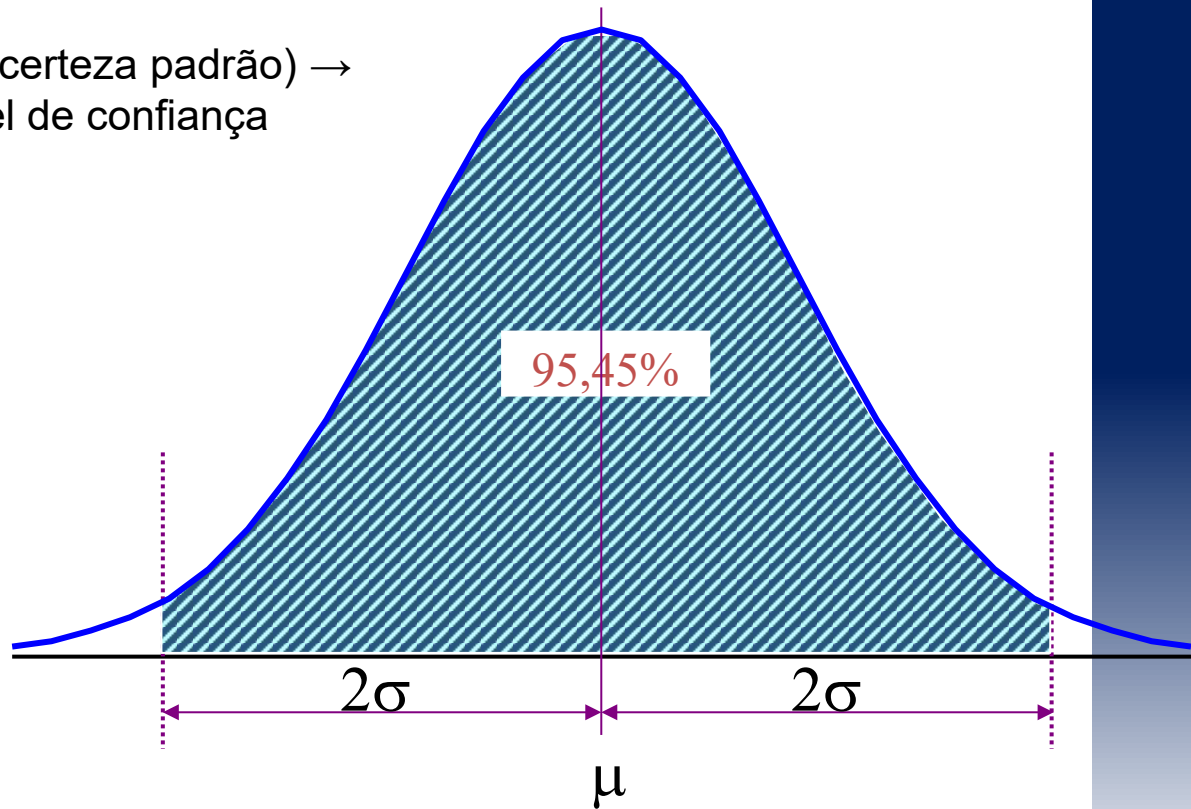
Interpretação da Área de 95,45%

- ➡ Entre $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$ estão aproximadamente 95,45% dos resultados.
- ➡ Isso significa que:
 - ➡ • A maioria das medições ocorre dentro desse intervalo
 - ➡ • A probabilidade de um valor fora desse intervalo é pequena



Relação com Incerteza (GUM)

- ➡ Incerteza padrão: $u = \sigma$ (desvio padrão)
- ➡ Incerteza expandida: $U = k \cdot u$
- ➡ Para $k = 2$:
- ➡ Incerteza expandida $U \approx 2u$ (Incerteza padrão) → aproximadamente 95% de nível de confiança

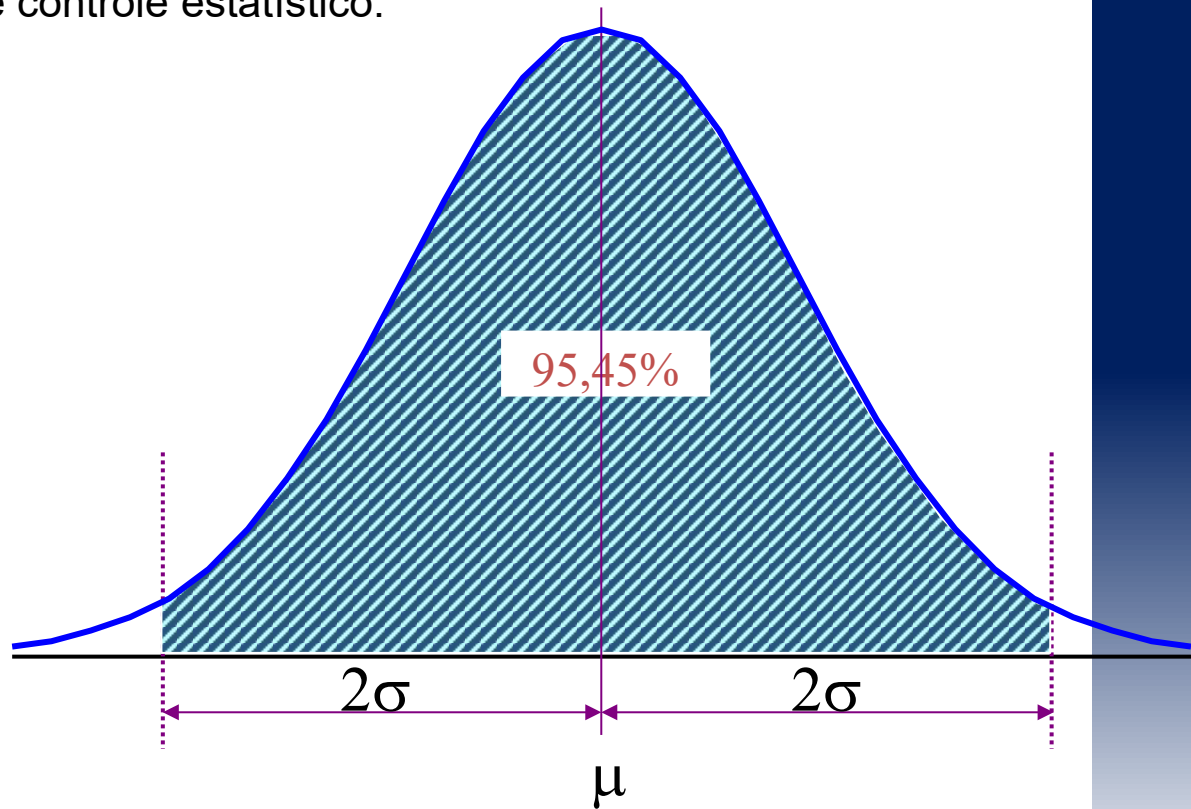


Regra Prática da Distribuição Normal

Desvio padrão (σ):

- ➡ $\pm 1\sigma \rightarrow 68,27\%$
- ➡ $\pm 2\sigma \rightarrow 95,45\%$
- ➡ $\pm 3\sigma \rightarrow 99,73\%$

- ➡ Muito utilizada em metrologia e controle estatístico.





Estimativa da repetitividade (Re)

(para 95,45 % de probabilidade)

A repetitividade define a faixa dentro da qual, para uma dada probabilidade, o erro aleatório é esperado.

Para amostras infinitas:

$$Re = 2 \cdot \sigma$$

Para amostras finitas:

$$Re = t \cdot u$$

Sendo “t” o coeficiente de Student para $\nu = n - 1$ graus de liberdade.

n = é o tamanho da amostra; σ = desvio padrão; u = incerteza padrão.



Coeficiente “t” de Student

$v = n - 1$ graus de liberdade.

n = é o tamanho da amostra

v	t	v	t	v	t	v	t
1	13,968	10	2,284	19	2,140	80	2,032
2	4,527	11	2,255	20	2,133	90	2,028
3	3,307	12	2,231	25	2,105	100	2,025
4	2,869	13	2,212	30	2,087	150	2,017
5	2,649	14	2,195	35	2,074	200	2,013
6	2,517	15	2,181	40	2,064	1000	2,003
7	2,429	16	2,169	50	2,051	10000	2,000
8	2,366	17	2,158	60	2,043	100000	2,000
9	2,320	18	2,149	70	2,036	∞	2,000



Exemplo de estimativa da repetitividade (Re)

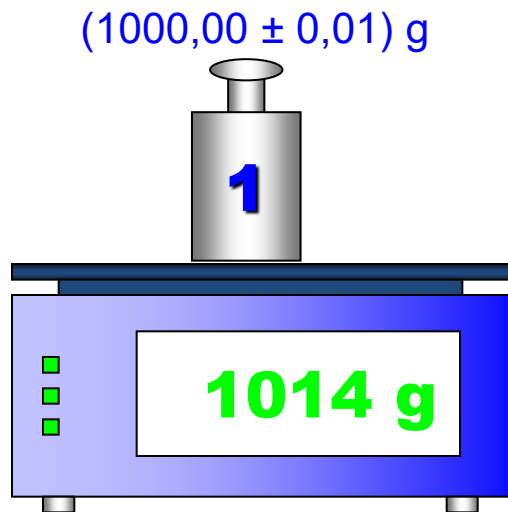
u = incerteza padrão.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

t = coeficiente de Student.

Re = Repetitividade.

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$



1014 g
1015 g
1017 g
1012 g
1015 g
1018 g
1014 g
1015 g
1016 g
1013 g
1016 g
1015 g

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - 1015)^2}{12 - 1}}$$

$n = 12$ (n° de medidas)

$u = 1,65$ g

$\nu = 12 - 1 = 11$

$t = 2,255$

$Re = 2,255 \cdot 1,65$

$Re = 3,72$ g

Média $\bar{I}$: 1015 g



Exemplo de estimativa da repetitividade (Re)

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Re = Repetitividade.

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - 1015)^2}{12 - 1}}$$

$n = 12$ (n° de medidas)

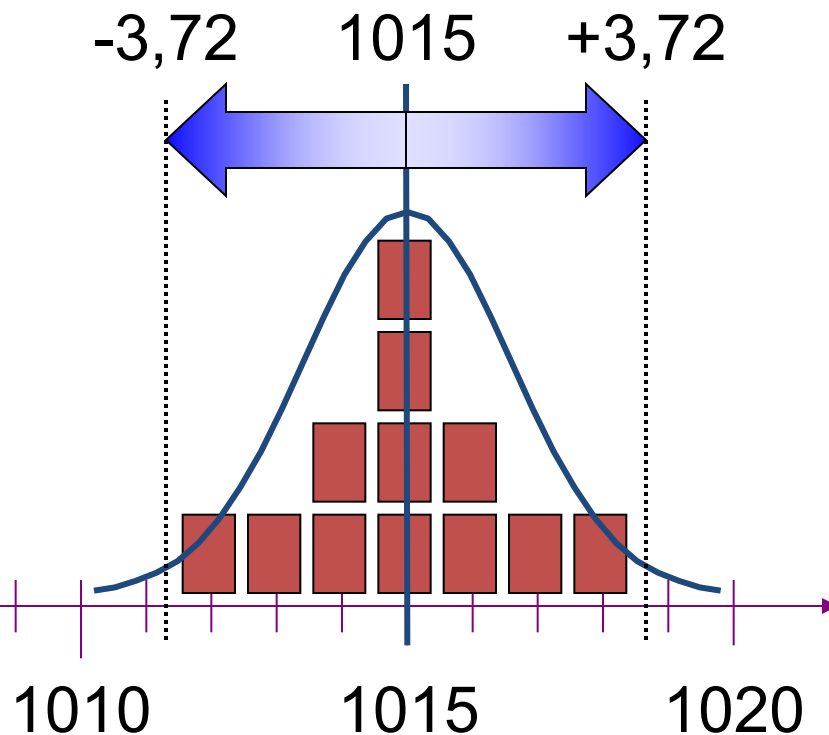
$u = 1,65$ g

$\nu = 12 - 1 = 11$

$t = 2,255$

$Re = 2,255 \cdot 1,65$

$Re = 3,72$ g





Efeitos da média de medições repetidas sobre o erro de medição

- **Efeito sobre os erros sistemáticos:**
 - Como o erro sistemático já é o erro médio, nenhum efeito é observado.



Efeitos da média de medições repetidas sobre o erro de medição

■ Efeitos sobre os erros aleatórios

- ➡ A média reduz a intensidade dos erros aleatórios, a repetitividade e a incerteza padrão na seguinte proporção:

$$\text{Re}_{\bar{I}} = \frac{\text{Re}_I}{\sqrt{n}} \qquad u_{\bar{I}} = \frac{u_I}{\sqrt{n}}$$

sendo:

n o número de medições utilizadas para calcular a média



Efeitos da média de medições repetidas sobre o erro de medição

- ➡ No problema anterior, a repetitividade da balança foi calculada:

$$\text{Re}_I = 3,72 \text{ g}$$

- ➡ Se várias séries de 12 medições fossem efetuadas, as médias obtidas devem apresentar repetitividade da ordem de:

$$\text{Re}_{\bar{I}_{12}} = \frac{3,72}{\sqrt{12}} = 1,07 \text{ g}$$

Interpretação Correta do Exemplo (n = 12)

Exemplo de estimativa da repetitividade (*Re*)

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

***Re* = Repetitividade.**

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

s = desvio padrão das medições individuais.

- ➡ Foram realizadas 12 medições.
- ➡ Com esses dados foi calculado o desvio padrão experimental.
- ➡ $s = 1,65$ g (desvio padrão das medições individuais)
- ➡ Graus de liberdade: $\nu = 11$
- ➡ $t(95\%) = 2,255$

O que representa $s = 1,65 \text{ g}$?

- ➡ s é o desvio padrão das medições individuais.
- ➡ Representa a variabilidade típica de uma leitura isolada.
- ➡ Mesmo tendo usado 12 dados para estimar, ele descreve o comportamento de uma única medição.

Cálculo feito no slide

Exemplo de estimativa da repetitividade (*Re*)

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

***Re* = Repetitividade.**

s = desvio padrão das medições individuais.

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

➡ $Re = t \cdot s$

➡ $Re = 2,255 \times 1,65$

➡ $Re = 3,72 \text{ g}$

➡ Esse valor NÃO é a incerteza da média.

O que é 3,72 g então?

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Re = Repetitividade.

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

s = desvio padrão das medições individuais.

➡ 3,72 g é o intervalo expandido baseado em $t \cdot s$.

➡ Representa o intervalo associado às medições sem aplicar a redução pela média.

Forma correta para a média das 12 medições

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Re = Repetitividade.

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

s = desvio padrão das medições individuais.

n o número de medições utilizadas para calcular a média

➡ Primeiro calcula-se a incerteza da média:

$$\text{➡ } u(\bar{x}) = s / \sqrt{n}$$

$$\text{➡ } u(\bar{x}) = 1,65 / \sqrt{12} = 0,476 \text{ g}$$

➡ Depois aplica-se o fator t .

Intervalo correto da média

u = incerteza padrão.

t = coeficiente de Student.

$\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Re = Repetitividade.

s = desvio padrão das medições individuais.

n o número de medições utilizadas para calcular a média

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n - 1}}$$

➡ $U = t \cdot (s / \sqrt{n})$

➡ $U = 2,255 \times (0,476)$

➡ $U = 1,07 \text{ g}$

➡ Este é o intervalo associado à MÉDIA das 12 medições.

- ➡ 1,65 g → desvio padrão das leituras individuais
- ➡ 3,72 g → $t \cdot s$ (sem redução pela média)
- ➡ 1,07 g → $t \cdot (s/\sqrt{n})$ → incerteza correta da média

- ➡ A média reduz apenas erros aleatórios.



Exemplo 2

- ➡ Para medir a massa de um diamante cor de rosa, o dono da joalheria solicitou a calibração da balança. Para tal, uma massa padrão de $(7,000 \pm 0,001)$ g foi então medida seis vezes pela balança, sendo encontradas as indicações listadas abaixo (todas em g). Com estes dados, determine a R_e , a T_d e a correção desta balança e o novo resultado da medição da massa do diamante. Indicações resultantes da medição da massa padrão encontram-se na tabela abaixo:



Exemplo 2

RESULTADO DAS MEDIÇÕES	
1	6,979g
2	6,964g
3	6,968g
4	6,972g
5	6,971g
6	6,966g

Exemplo 2 – Calibração da balança

- ➡ Dados: massa padrão $(7,000 \pm 0,001)$ g medida 6 vezes.
- ➡ Pede-se: R_e , T_d , correção da balança e novo resultado da massa do diamante.

Exemplo 2

- ➡ Para medir a massa de um diamante cor de rosa, o dono da joalheria solicitou a calibração da balança. Para tal, uma massa padrão de $(7,000 \pm 0,001)$ g foi então medida seis vezes pela balança, sendo encontradas as indicações listadas abaixo (todas em g). Com estes dados, determine a R_e , a T_d e a correção desta balança e o novo resultado da medição da massa do diamante. Indicações resultantes da medição da massa padrão encontram-se na tabela abaixo:





Exemplo 2

RESULTADO DAS MEDIÇÕES	
1	6,979g
2	6,964g
3	6,968g
4	6,972g
5	6,971g
6	6,966g

Cálculos (n = 6)

Coeficiente “t” de Student

$v = n - 1$ graus de liberdade.

n = é o tamanho da amostra

v	t	v	t
1	13,968	10	2,284
2	4,527	11	2,255
3	3,307	12	2,231
4	2,869	13	2,212
5	2,649	14	2,195
6	2,517	15	2,181
7	2,429	16	2,169
8	2,366	17	2,158
9	2,320	18	2,149

➡ 1) Média das indicações:

➡ $\bar{x} = 6.970 \text{ g}$

➡ 2) Desvio padrão experimental:

➡ $s = 0.005329 \text{ g} \approx 0.0053 \text{ g}$

➡ Graus de liberdade: $v = n - 1 = 5$

➡ 3) Fator t (95%):

➡ t (nível de confiança de aproximadamente 95%, $v = 5$) = 2.571

➡ 4) Repetitividade (95%):

➡ $Re = t \cdot s = 2.571 \cdot 0.0053 = 0.0137 \text{ g}$

Nível de confiança, para um intervalo bilateral	t
90%	2,015
95%	2,571
99%	4,032

Como ler corretamente a Tabela t de Student

- ➡ Objetivo:
- ➡ • Evitar confusão entre unilateral e bilateral
- ➡ • Entender onde entra α e $\alpha/2$
- ➡ • Saber escolher corretamente o valor de t

Relação entre Confiança e α

➡ Nível de confiança = $1 - \alpha$

➡ Exemplo:

➡ 95% $\rightarrow \alpha = 0,05$

➡ 90% $\rightarrow \alpha = 0,10$

➡ 99% $\rightarrow \alpha = 0,01$

Intervalo Bilateral ($\pm$)

- ➡ Usado em metrologia.
- ➡ Forma:
 - ➡ $\bar{x} \pm t \cdot s$
- ➡ Erro pode ocorrer para cima ou para baixo.
- ➡ Logo:
 - ➡ Divide-se α em duas partes $\rightarrow \alpha/2$ em cada cauda.
- ➡ Para 95%:
 - ➡ $\alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025$

Intervalo Unilateral

- ➡ Usado quando o erro importa apenas em um lado.
- ➡ Exemplo:
- ➡ Limite máximo permitido.
- ➡ Neste caso:
- ➡ Não divide α por 2.
- ➡ Usa-se α inteiro na tabela.

Exemplo Prático ($v = 5$)

- ➡ $n = 6$ medições $\rightarrow v = n - 1 = 5$
- ➡ Para 95% BILATERAL:
 - ➡ $\alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025$
 - ➡ Na tabela: procurar coluna 0,025
 - ➡ Resultado: $t = 2,571$
- ➡ Para 95% UNILATERAL:
 - ➡ Procurar coluna 0,05
 - ➡ $t \approx 2,015$

Resumo Comparativo ($v = 5$)

- ➡ 95% bilateral $\rightarrow$ usar $\alpha/2 = 0,025 \rightarrow t = 2,571$
- ➡ 95% unilateral $\rightarrow$ usar $\alpha = 0,05 \rightarrow t = 2,015$
- ➡ Conclusão:
- ➡ Sempre verificar se o intervalo é $\pm$ (bilateral)
- ➡ ou apenas um limite (unilateral).

Tendência (Td) e correção (C)

- ➡ Valor de referência: $m_{\text{ref}} = 7.000 \text{ g}$
- ➡ Média indicada: $\bar{x} = 6.970 \text{ g}$
- ➡ Tendência (erro de indicação):
 - ➡ $Td = \bar{x} - m_{\text{ref}} = -0.030 \text{ g}$
- ➡ Correção da balança (a somar na indicação):
 - ➡ $C = m_{\text{ref}} - \bar{x} = 0.030 \text{ g}$
- ➡ Interpretação: $Td < 0 \rightarrow$ a balança subindica; por isso C é positiva.

Massa do diamante (corrigida) e incerteza (t)

- ➡ Adotando uma indicação para o diamante: $m_{\text{ind}} = 1.250 \text{ g}$
- ➡ Correção: $C = 0.030 \text{ g}$
- ➡ Massa corrigida:
 - ➡ $m = m_{\text{ind}} + C = 1.250 + 0.030 = 1.280 \text{ g}$
- ➡ Incerteza (95%) da média da calibração (t de Student):
 - ➡ $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n} = 0.0022 \text{ g}$
 - ➡ $U = t \cdot u(\bar{x}) = 2.571 \cdot 0.0022 = 0.0056 \text{ g}$
- ➡ Resultado ($\approx 95\%$):
 - ➡ $m = (1.280 \pm 0.006) \text{ g}$