

Análise comparativa de métodos numéricos para solução de problemas inversos de transferência de calor em usinagem

Comparative analysis of numerical methods for solving inverse heat transfer problems in machining

Análisis comparativo de métodos numéricos para la solución de problemas inversos de transferencia de calor en mecanizado

DOI: 10.54033/cadpedv22n9-446

Originals received: 6/2/2025

Acceptance for publication: 6/20/2025

Daniel Schwan Monteiro de Sousa

Graduado em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Endereço: Itabira, Minas Gerais, Brasil

E-mail: ss.daniel096@gmail.com

Rogério Fernandes Brito

Doutor em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Endereço: Itabira, Minas Gerais, Brasil

E-mail: rogbrito@unifei.edu.br

Ricardo Luiz Perez Teixeira

Doutor em Engenharia de Materiais

Instituição: Universidade Federal do Rio de Janeiro

Endereço: Itabira, Minas Gerais, Brasil

E-mail: ricardo.luiz@unifei.edu.br

Paulo Mohallem Guimarães

Doutor em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Endereço: Itabira, Minas Gerais, Brasil

E-mail: pauloguimaraes@unifei.edu.br

José Carlos de Lacerda

Doutor em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

Endereço: Itabira, Minas Gerais, Brasil

E-mail: jlacerda.cem@gmail.com

RESUMO

Este trabalho avalia o impacto de diferentes configurações numéricas na solução de um problema inverso de transferência de calor durante o processo de usinagem, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) acoplado ao algoritmo de Levenberg-Marquardt. Inicialmente, foi modelado um caso controlado com propriedades térmicas constantes, no qual se testaram diferentes tipos de elementos de malha (tetraédricos e cúbicos), refinamentos, funções de interpolação e solucionadores de sistemas lineares (diretos e iterativos). As simulações foram realizadas no COMSOL Multiphysics 5.6 com integração via MATLAB, permitindo quantificar o tempo de processamento, o uso de memória e os desvios entre os valores simulados e os dados experimentais. Os resultados indicaram que o uso de solucionadores iterativos (especialmente o FGMRES) com funções de interpolação de ordem inferior em malhas otimizadas proporciona significativas reduções no tempo computacional e no tamanho dos arquivos, com precisão comparável aos métodos convencionais. Essa configuração foi então aplicada a um caso real de usinagem com propriedades térmicas dependentes da temperatura, demonstrando ganhos relevantes de desempenho computacional. O estudo destaca a importância da escolha adequada de parâmetros numéricos em simulações térmicas de engenharia, principalmente em contextos em que a estimativa de fluxos de calor é essencial, como no desgaste de ferramentas de corte.

Palavras-chave: COMSOL. Levenberg-Marquardt. Método dos Elementos Finitos. Problema Inverso de Transferência de Calor. Usinagem.

ABSTRACT

This work evaluates the impact of different numerical configurations on solving an inverse heat transfer problem during machining processes, using the Finite Element Method (FEM) coupled with the Levenberg-Marquardt algorithm. Initially, a controlled case with constant thermal properties was modeled, testing various mesh element types (tetrahedral and hexahedral), refinements, interpolation functions, and linear system solvers (direct and iterative). Simulations were performed in COMSOL Multiphysics 5.6 with MATLAB integration, quantifying processing time, memory usage, and deviations between simulated and experimental data. Results indicated that iterative solvers (especially FGMRES) with lower-order interpolation functions on optimized meshes significantly reduce computational time and file sizes while maintaining accuracy comparable to conventional methods. This configuration was then applied to a real machining case with temperature-dependent thermal properties, demonstrating relevant computational performance gains. The study highlights the importance of selecting appropriate numerical parameters in thermal engineering simulations, particularly in contexts where heat flux estimation is critical, such as in cutting tool wear.

Keywords: COMSOL. Finite Element Method. Inverse Heat Transfer Problem. Machining. Levenberg-Marquardt.

RESUMEN

Este trabajo evalúa el impacto de diferentes configuraciones numéricas en la solución de un problema inverso de transferencia de calor durante el proceso de mecanizado, utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF) acoplado al algoritmo de Levenberg-Marquardt. Inicialmente, se modeló un caso controlado con propiedades térmicas constantes, en el cual se probaron distintos tipos de elementos de malla (tetraédricos y cúbicos), refinamientos, funciones de interpolación y solucionadores de sistemas lineales (directos e iterativos). Las simulaciones se realizaron en COMSOL Multiphysics 5.6 con integración mediante MATLAB, permitiendo cuantificar el tiempo de procesamiento, el uso de memoria y las desviaciones entre los valores simulados y los datos experimentales. Los resultados indicaron que el uso de solucionadores iterativos (especialmente FGMRES) con funciones de interpolación de orden inferior en mallas optimizadas proporciona reducciones significativas en el tiempo computacional y el tamaño de los archivos, con una precisión comparable a los métodos convencionales. Esta configuración se aplicó luego a un caso real de mecanizado con propiedades térmicas dependientes de la temperatura, demostrando ganancias relevantes en el rendimiento computacional. El estudio destaca la importancia de la selección adecuada de parámetros numéricos en simulaciones térmicas de ingeniería, especialmente en contextos donde la estimación de flujos de calor es esencial, como en el desgaste de herramientas de corte.

Palabras clave: COMSOL. Levenberg-Marquardt. Método de Elementos Finitos. Problema Inverso de Transferencia de Calor. Mecanizado.

1 INTRODUÇÃO

Na matemática, os problemas podem ser resolvidos de duas formas principais: soluções analíticas e soluções numéricas. Enquanto as soluções analíticas buscam uma resposta abrangente e contínua, as soluções numéricas são obtidas discretizando o domínio e calculando a função apenas em pontos específicos, resultando em aproximações. O uso de métodos numéricos traz vantagens como automatização dos cálculos e modelos mais próximos da realidade, sendo amplamente utilizados em engenharia para resolver problemas práticos (Kendall, 2019).

A evolução da capacidade de processamento computacional impulsionou o uso de softwares de simulação numérica, como ANSYS CFX e COMSOL Multiphysics, que permitem análises detalhadas em diversas áreas. Além disso,

esses programas podem ser aplicados em problemas inversos, que buscam encontrar as condições iniciais do problema a partir de observações do fenômeno, beneficiando a indústria tanto no desenvolvimento de produtos quanto na melhoria de processos, destacando a importância das metodologias de simulação numérica na atualidade (Kendall, 2019).

A usinagem é uma tecnologia essencial na indústria para conferir geometrias complexas e ajustar o acabamento de peças, sendo um processo de fácil automatização (Machado; Silva, 2004). Durante a usinagem, a energia consumida é principalmente convertida em calor, gerando altas temperaturas que afetam a vida útil das ferramentas de corte, exigindo estudos para reduzir o calor absorvido (Carvalho, 2005).

A escolha dos materiais das ferramentas de corte, como o metal duro, é crucial para enfrentar as condições de usinagem e a classe de material trabalhado (Machado; Silva, 2004). Porém, ferramentas de metal duro estão sujeitas à oxidação térmica em temperaturas elevadas, afetando suas propriedades e desempenho, fatores importantes a considerar na indústria (Gu *et al.*, 2012). Além disso, estudos revelam que as propriedades e o desgaste das ferramentas de metal duro dependem da distribuição e proporção das partículas no material (Lee *et al.*, 2018).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A usinagem é um processo de fabricação essencial na indústria metalmeccânica, no qual a remoção controlada de material (sobremetal) é realizada na forma de cavaco para obter as dimensões e o acabamento superficial desejados (Machado; Silva, 2004). O mecanismo de formação do cavaco ocorre em quatro etapas: (1) aplicação de tensão de cisalhamento devido ao contato entre ferramenta e peça, (2) recalque do material contra a superfície de saída da ferramenta, (3) deformação plástica progressiva até a ruptura e (4) escorregamento do cavaco sobre a ferramenta, reiniciando o ciclo (Machado; Silva, 2004).

Quanto ao balanço energético, a maior parte da potência consumida é

convertida em calor devido ao cisalhamento do material. O cavaco dissipa a maior parcela desse calor, enquanto a ferramenta absorve uma fração significativa, podendo atingir temperaturas superiores a 1100°C em condições severas de corte (Carvalho, 2005). Essas temperaturas elevadas aceleram o desgaste da ferramenta, reduzindo sua vida útil e aumentando custos operacionais.

A energia térmica armazenada ($\dot{E}_a$) em determinado corpo ao longo do tempo pode ser descrita como a energia térmica proveniente da troca de calor que o corpo realiza com sua vizinhança ($\dot{E}_q$) acrescida da energia gerada em seu interior ($\dot{E}_g$).

$$\dot{E}_a = \dot{E}_q + \dot{E}_g \quad (1)$$

Considerando que seja A, a área das fronteiras do volume de controle sujeita ao fluxo de calor $\vec{q}$ e sendo $\hat{n}$ o vetor unitário que aponta para fora da superfície de forma perpendicular, dessa forma o termo $\dot{E}_q$ é descrito pela Equação (2). Já o termo de geração é descrito em função do vetor $\vec{r}$ que representa cada ponto dentro do interior da ferramenta é representado pela Equação (3) e por fim, a energia térmica armazenada é descrita pela Equação (4).

$$\dot{E}_q = - \int_A \vec{q} * \hat{n} * dA = - \int_V \nabla \cdot \vec{q}(\vec{r}, t) * dV \quad (2)$$

$$\dot{E}_g = \int_V g(\vec{r}, t) * dV \quad (3)$$

$$\dot{E}_a = \int_V \rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} * dV \quad (4)$$

Substituindo os termos da Equação (2), (3) e (4) na Equação (1) e aproximando o valor do volume de controle para 0, ou seja, $V \rightarrow 0$, chega-se à Equação (5).

$$\rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \vec{q}(\vec{r}, t) + g(\vec{r}, t) \quad (5)$$

Pela lei de Fourier, um gradiente de temperatura em um sistema, gera de maneira natural um fluxo de calor. Se for considerado esse gradiente de temperatura em um meio sólido, homogêneo e isotrópico com uma condutividade térmica k , a função que descreve a difusão de calor dentro do material é descrita pela Equação (7). Ao substituir a função de transferência de calor da Equação (7) na Equação (6), elimina-se o termo $\vec{q}(\vec{r}, t)$ e chega-se na Equação (8). Como o vetor $\vec{r}$ representa a posição espacial com três direções (x, y, z), a Equação (8) pode ser descrita em coordenadas cartesianas na Equação (9).

$$\vec{q}(\vec{r}, t) = -k \nabla T(\vec{r}, t) \quad (6)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot [-k \nabla T(\vec{r}, t)] + g(\vec{r}, t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Contudo, a Equação (9) é utilizada para casos contínuos e é de difícil resolução analítica para geometrias complexas, como a de uma ferramenta de corte. Para resolver esse problema, o presente trabalho utilizou o Método dos Elementos Finitos (MEF), que discretiza o domínio em elementos de geometria simples, permitindo a solução numérica da Equação diferencial.

No MEF, o domínio é dividido em uma malha composta por nós (pontos discretos) e elementos (regiões delimitadas por esses nós). Cada elemento é definido por uma função de interpolação que aproxima a distribuição de temperatura em seu interior. Por exemplo, em um elemento triangular linear, a temperatura $\phi=f(x,y)$ varia linearmente entre os nós, permitindo o cálculo das derivadas parciais presentes na Equação (9).

O Método dos Elementos Finitos tem sido amplamente aplicado em diversas áreas da engenharia e ciência, demonstrando sua versatilidade na

solução de problemas complexos. Por exemplo, Sampaio (2006) utilizou o MEF para modelar escoamentos viscosos incompressíveis, enquanto Brito (1999) aplicou-o em problemas de transferência de calor com convecção laminar, incluindo casos de convecção forçada, natural e mista.

Além disso, o método tem sido empregado em análises térmicas de sistemas industriais, como no estudo de Appadurai *et al.* (2020), que avaliou o resfriamento de motores de indução por meio da otimização do projeto de aletas. Sua aplicação também se estende à área médica, como em Wu *et al.* (2021), que utilizaram o MEF baseado em imagens de tomografia computadorizada para diagnóstico de osteoporose. Na engenharia de materiais, Chen e Hao (2021) aplicaram o método para avaliar propriedades mecânicas de compósitos de titânio, como resistência à flexão e limite de elasticidade.

Entretanto, em certos casos práticos, não é possível medir diretamente a causa de um fenômeno (como uma fonte de calor), mas apenas seus efeitos (temperaturas em pontos específicos). Para estimar esses parâmetros desconhecidos, utilizam-se problemas inversos, resolvidos por métodos como o Algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM). Desenvolvido inicialmente por Levenberg (1944) e aprimorado por Marquardt (1963), esse método permanece amplamente aplicado devido à sua eficiência em problemas não lineares.

O LM combina técnicas de gradiente e aproximação quadrática, utilizando um fator de amortecimento para balancear precisão e estabilidade durante as iterações. Cui *et al.* (2016) melhoraram o algoritmo ao incorporar a diferenciação complexa para análise de sensibilidade, otimizando a estimativa de fluxos de calor em problemas transientes. Estudos como o de Cui *et al.* (2017) ainda relacionaram esse fator à função objetivo (medida do erro entre valores calculados e observados), essencial para a convergência. Aplicações práticas incluem a determinação de fluxos térmicos em processos industriais, como no trabalho de Torres *et al.* (2021) com placas de oxiacetileno, e a estimativa de propriedades termofísicas, exemplificada por Vega-Suarez *et al.* (2018) na caracterização de materiais ortotrópicos.

3 METODOLOGIA

Neste trabalho, a Equação (9) será solucionada através do método dos elementos finitos para avaliar as temperaturas em duas situações distintas: (1) no caso controlado simplificado e (2) em um caso prático de usinagem. No caso controlado - por apresentar menor complexidade computacional - serão testadas sistematicamente diferentes combinações de parâmetros numéricos (tipo de elemento finito, grau de refinamento da malha, função de interpolação e classes de solucionadores de sistemas lineares) com o objetivo de identificar a configuração ótima que minimize o tempo computacional. Esta configuração otimizada será então aplicada ao caso real de usinagem e comparada com a configuração padrão do COMSOL. Quanto aos parâmetros do material, no caso controlado a condutividade térmica (k) será considerada constante, enquanto no caso real a condutividade térmica será modelada como função da temperatura. Em ambos os casos, a massa específica (ρ) e o calor específico (c_p) serão tratados como constantes independentes da temperatura.

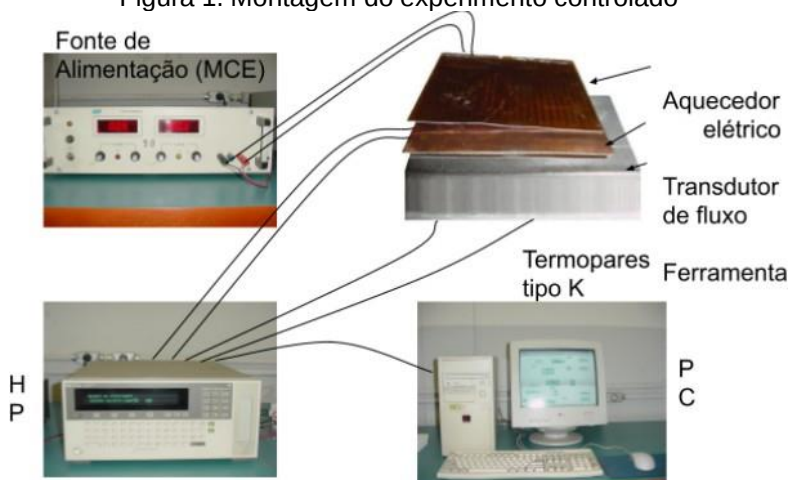
Equações diferenciais parciais de segunda ordem, como é o caso da Equação (9), podem ter mais de uma solução. Para garantir que tenham solução única é necessário especificar as condições iniciais e as condições de contorno do sistema. A condição inicial define a distribuição de temperaturas do sistema no tempo zero ($t = 0$) em qualquer posição do domínio, que será considerada a temperatura ambiente.

Já as condições de contorno podem variar conforme o problema estudado e geralmente são as temperaturas prescritas na superfície do sistema, o fluxo de calor e troca de calor por convecção ou radiação com o meio externo (SODRÉ, 2003). Nesse trabalho as temperaturas foram medidas em pontos específicos, através da utilização de termopares, que serão utilizadas como condições de contorno. Os termopares utilizados neste trabalho coletaram resultados de temperatura a cada 0,2 segundos.

O caso controlado foi baseado no experimento de Carvalho (2005), exemplificado na Figura 1, que utilizou uma ferramenta de corte de metal duro ($12,7 \times 12,7 \times 4,7$ mm) com um aquecedor elétrico acoplado a uma fonte de

corrente contínua (MCE) para geração de calor. Um transdutor de fluxo posicionado entre o aquecedor e a ferramenta mediu o fluxo térmico, enquanto dois termopares registraram o aumento de temperatura na ferramenta. Os dados foram coletados por um sistema de aquisição HP 75000 Series B com voltímetro E1326B controlado por computador.

Figura 1. Montagem do experimento controlado



Fonte: Carvalho (2005)

O COMSOL Multiphysics 5.6 disponibiliza duas abordagens distintas para a solução de sistemas lineares no MEF: solucionadores diretos (MUMPS, PARDISO, SPOOLES e Dense Matrix) e iterativos (GMRES, FGMRES, BiCGStab, TFQMR e Gradientes Conjugados). Além da escolha do solucionador, o método permite a seleção de diferentes funções de interpolação - linear, Lagrangeana e Serendipity - que influenciam diretamente na aproximação das variáveis do problema. Para avaliar o impacto da discretização espacial, foram testadas seis configurações de malha, variando tanto o tipo de elemento (tetraédrico ou hexaédrico) quanto o grau de refinamento (grosseira, normal e fina), permitindo uma análise abrangente da influência desses parâmetros nos resultados. A Tabela 1 mostra a relação do tipo de elemento, seu refinamento e quantidade de elementos resultado para o caso controlado.

Tabela 1. Relação tipo de elemento, refinamento e quantidade de elementos

Tipo de Elemento	Refinamento	Quantidade de Elementos
Tetraédrico	Grosseira	905
Tetraédrico	Normal	5.868
Tetraédrico	Fina	36.078
Cúbico	Grosseira	72
Cúbico	Normal	400
Cúbico	Fina	2.499

Fonte: Dados dos autores (2025)

Todas as simulações deste trabalho foram realizadas em um computador com as seguintes especificações: Processador: Intel(R) Core(TM) i5-7400 CPU @ 3.00 GHz; Memória RAM de 8.156 GB; Placa de vídeo: NVIDIA GeForce GTX 1050; Sistema operacional: Windows 10 Pro.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

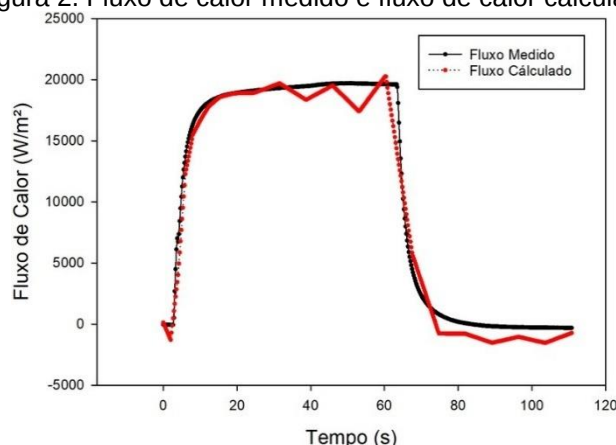
As simulações foram realizadas no software COMSOL Multiphysics, empregando o método de Levenberg-Marquardt através do pacote comercial LiveLink™ for MATLAB, que permite a integração entre o COMSOL e o MATLAB. Inicialmente os testes foram conduzidos utilizando diferentes solucionadores diretos, com uma malha grosseira de elementos tetraédricos e função de interpolação quadrática de Lagrange, pois fazem parte da configuração padrão do CONSOL. As propriedades termofísicas do material da ferramenta de corte foram mantidas constantes, adotando os valores de referência estabelecidos por Carvalho (2005): condutividade térmica (k) de 43,1 W/(m·K) e difusividade térmica (α) de $14,8 \times 10^{-6}$ m²/s. Os resultados obtidos nestas simulações estão apresentados na Tabela 2, destacando o tempo de processamento, os desvios medidos e calculados nos termopares 1 e 2, o desvio médio do fluxo de calor calculado. A Figura 2 mostra a diferença entre o fluxo de calor calculado e o medido.

Tabela 2. Análise do efeito de diferentes solucionadores diretos para um caso controlado

Método de Solução Direto	Tempo(s)	Desvio Termopar 1	Desvio Termopar 2	Desvio médio Fluxo de Calor
MUMPS	257	1.94%	1.85%	507.46%
PARDISO	151	1.94%	1.85%	507.46%
SPOOLES	690	1.94%	1.85%	507.46%
Dense Matrix	768	1.94%	1.85%	507.46%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Figura 2. Fluxo de calor medido e fluxo de calor calculado



Fonte: Autor

A Tabela 3 mostra o desvio médio do fluxo de calor separado por intervalos de tempo. Dessa forma para se avaliar os desvios médio do fluxo de calor calculado no caso simplificado serão levados em consideração o intervalo de 5.2 a 70 segundos.

Tabela 3. Desvio médio do Fluxo de Calor avaliados em intervalos de tempo distintos

Intervalo de Tempo	Desvio médio Fluxo de Calor
0 a 5 segundos	471.78%
5.2 a 70 segundos	6.35%
70.2 a 110.8 segundos	1307.34%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Ainda na malha grosseira de elemento tetraédrico foram avaliados os efeitos da função de interpolação sobre os resultados da simulação utilizando o solucionador direto PARDISO como padrão.

Tabela 4. Resultados de diferentes funções de interpolação avaliadas no solucionador direto PARDISO numa malha grosseira de elemento tetraédrico.

Família	Ordem	Tempo(s)	Desvio Ter- mopar 1	Desvio Ter- mopar 2	Desvio Fluxo de Calor
-	Linear	63	1,94%	1,85%	12,34%
Lagrange	2. ^a Ordem	142	1,94%	1,85%	6,35%
Lagrange	3. ^a Ordem	574	1,94%	1,85%	6,35%
Lagrange	4. ^a Ordem	1668	1,94%	1,85%	7,33%
Lagrange	5. ^a Ordem	4174	1,94%	1,85%	7,33%
Serendipity	2. ^a Ordem	134	1,94%	1,85%	6,35%
Serendipity	3. ^a Ordem	580	1,94%	1,85%	6,35%
Serendipity	4. ^a Ordem	1540	1,94%	1,85%	7,13%

Fonte: Dados dos autores (2025)

As simulações também foram avaliadas utilizando métodos iterativos para resolver o sistema de equações. Porém, neste caso, os solucionadores serão avaliados apenas nas funções linear e cúbica da família Lagrangeana e Serendipity, ainda utilizando a mesma malha do caso anterior. Os resultados são apresentados nas Tabelas 5, 6 e 7.

Tabela 5. Métodos Iterativos avaliados na função linear de interpolação

Método Inte- rativo	Tempo (s)	Desvio Ter- mopar 1	Desvio Ter- mopar 2	Desvio Fluxo de Calor
GMRES	77	1.94%	1.85%	12.34%
FGMRES	66	1.94%	1.85%	12.34%
BiCGStab	81	1.94%	1.85%	12.34%
Conjugate Gradiente	69	1.94%	1.85%	12.34%
TFQMR	76	1.94%	1.85%	12.34%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Tabela 6. Métodos Iterativos avaliados na função cúbica de Lagrange

Método Interativo	Tempo (s)	Desvio Termopar 1	Desvio Termopar 2	Desvio Fluxo de Calor
GMRES	1047	1.94%	1.85%	6.35%
FGMRES	816	1.94%	1.85%	6.35%
BiCGStab	1291	1.94%	1.85%	6.35%
Conjugate Gradiente	942	1.94%	1.85%	6.35%
TFQMR	1154	1.94%	1.85%	6.35%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Tabela 7. Métodos Iterativos avaliados na função cúbica serendipity

Método Iterativo	Tempo (s)	Desvio Termopar 1	Desvio Termopar 2	Desvio Fluxo de Calor
GMRES	1003	1.94%	1.85%	7.33%
FGMRES	715	1.94%	1.85%	7.33%
BiCGStab	1235	1.94%	1.85%	7.33%
Conjugate Gradiente	1157	1.94%	1.85%	7.33%
TFQMR	1129	1.94%	1.85%	7.33%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Para avaliar os efeitos dos tipos de elementos de malha e seu refinamento nas temperaturas estimadas numericamente e no fluxo calculado foi utilizado o método iterativo FGMRES, na Equação linear de interpolação, pois essa configuração se mostrou ser a mais rápida entre todos os métodos avaliados. Os resultados são apresentados na Tabela abaixo.

Tabela 8. Resultado comparativo entre diferentes malhas computacionais

Malha	Tempo(s)	Desvio Termopar 1	Desvio Termopar 2	Desvio Fluxo de Calor
Tetraédrica Grossa	65	1,94%	1,85%	12,34%
Tetraédrica Normal	123	1,94%	1,85%	8,28%
Tetraédrica Fina	36078	1,94%	1,85%	7,33%
Cúbica Grossa	47	1,95%	1,86%	12,34%
Cúbica Normal	128	1,94%	1,86%	10,89%
Cúbica Fina	404	1,94%	1,85%	7,33%

Fonte: Dados dos autores (2025)

Como as temperaturas alcançadas durante o processo de usinagem são muito maiores que a do caso controlado, para este caso, as propriedades térmicas serão consideradas como uma função da temperatura. As propriedades termo físicas dependentes da temperatura do metal duro e do aço 1045 foram retiradas dos trabalhos de Grzesik *et al.* (2004), Grzesik *et al.* (2009), Jiang *et al.* (2016). Os valores utilizados são apresentados na Tabela abaixo.

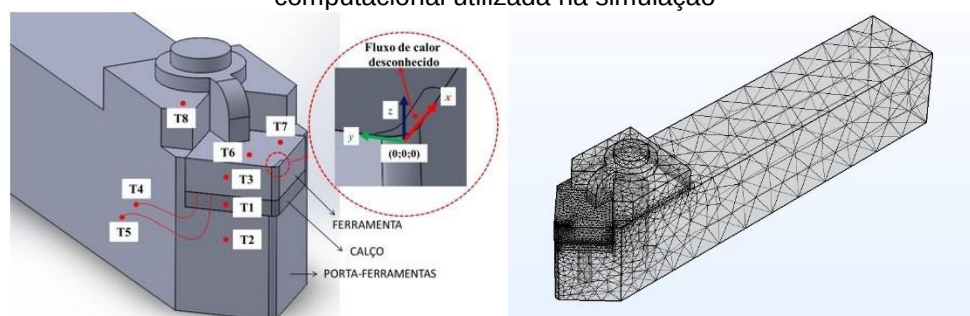
Tabela 9. propriedades termo físicas dependentes da temperatura do metal duro e do aço 1045

Temperatura (°C)	Metal duro k (W/mK)	Metal duro α * 10^6 (m ² /s)	Aço 1045 k (W/mK)	Aço 1045 α * 10^6 (m ² /s)
30	54.94	18.37	38.00	13.6
50	54.46	17.77	37.58	13.2
100	53.25	16.47	36.34	12.8
150	52.07	15.41	34.88	12.1
200	50.92	14.53	33.23	11.8
300	48.81	13.18	29.52	10.3
400	47.06	12.23	25.51	9.21
500	45.80	11.59	21.50	7.98
600	45.16	11.18	17.79	6.92
700	45.29	10.99	14.68	5.32
800	46.30	10.97	12.47	3.79
1000	51.54	11.38	11.95	3.89

Fonte: Grzesik *et al.* (2004), Grzesik *et al.* (2009), Jiang *et al.* (2016).

A Figura 3 representa o conjunto da ferramenta de corte, calço e porta-ferramenta utilizada no processo experimental realizado por Carvalho (2005). A posição dos termopares no conjunto, a área de contato entre a ferramenta e a peça também a malha utilizada para realização do experimento no caso real também é exemplificada.

Figura 3. Conjunto da ferramenta de corte com as posições dos termopares e malha computacional utilizada na simulação



Fonte: Adaptado de Carvalho (2005)

O problema térmico apresentado neste trabalho é resolvido em duas etapas. Na primeira etapa resolve-se o problema inverso que consiste em estimar o fluxo de calor na interface cavaco ferramenta através dos dados das

temperaturas experimentais. Já a segunda consiste em resolver o problema direto para obter os valores das temperaturas numéricas em todo o domínio, uma vez que todas as condições de contorno já são conhecidas.

Na Tabela 10 é possível comparar os resultados das duas simulações de problemas inversos realizados no conjunto ferramenta de corte de metal duro, calço de metal duro e porta-ferramenta de aço 1045 utilizada no processo de torneamento. Uma utilizando o solucionador padrão do COMSOL (PARDISO + Função quadrática de Lagrange) e a outra configurada a partir dos estudos feitos no caso controlado (FGMRES + Função linear).

Tabela 10. Comparação entre os efeitos de diferentes configurações na simulação computacional de um caso real de usinagem

	FGMRES + Função Linear	PARDISO + Função Quadrática de Lagrange
Tempo	9367 s (2h36min7s)	87427 s (1d0h17min7s)
Tamanho do arquivo (Gb)	0.73	4.54
Desvio médio termopar 1	46.86%	46.93%
Desvio médio termopar 2	26.95%	69.31%
Desvio médio termopar 3	45.36%	33.45%
Desvio médio termopar 4	22.35%	2.33%
Desvio médio termopar 5	5.30%	4.36%
Desvio médio termopar 6	19.07%	22.10%
Desvio médio termopar 7	16.03%	15.07%
Desvio médio termopar 8	75.40%	77.90%

Fonte: Dados dos autores (2025)

5 CONCLUSÃO

Os resultados demonstram que a estimativa do fluxo de calor por meio do problema inverso é sensível à configuração numérica adotada. Observou-se que malhas grosseiras e funções de interpolação de baixa ordem tendem a apresentar maiores desvios na estimativa do fluxo de calor, especialmente em situações de transição térmica abrupta, como o acionamento ou desligamento da fonte de calor. Isso ocorre devido à baixa densidade de pontos de controle, o que dificulta a captação precisa do fenômeno físico.

Contudo, os testes revelaram que a melhoria de apenas um desses parâmetros (refinamento da malha ou função de interpolação) já é suficiente para

aumentar significativamente a precisão das simulações, uma vez que ambos possuem efeitos similares na qualidade da solução.

Além disso, elementos tetraédricos mostraram menor desvio nos parâmetros estimados, embora exijam um número significativamente maior de elementos para discretizar o domínio, o que implica maior tempo computacional. Já os solucionadores iterativos, como o FGMRES, quando combinados com funções de interpolação lineares, apresentaram desempenho computacional superior sem perda significativa de acurácia, tornando-se uma alternativa viável para simulações complexas com restrições de tempo e recursos computacionais.

Em comparação com a configuração padrão do COMSOL (PARDISO + interpolação quadrática), a abordagem otimizada proposta neste trabalho (FGMRES + interpolação linear) reduziu em mais de 90% o tempo de simulação e o uso de memória, com resultados similares de precisão, reforçando a viabilidade da sua aplicação em ambientes industriais e acadêmicos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela sabedoria, força e oportunidades que me permitiram concluir este trabalho.

À minha família, pelo apoio incondicional, incentivo constante e paciência durante toda a jornada acadêmica.

Aos amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram com sugestões, discussões e motivação ao longo deste processo.

Aos professores e orientadores, pela orientação valiosa, conhecimento compartilhado e dedicação em auxiliar no desenvolvimento desta pesquisa.

Por fim, a todos que, de alguma forma, colaboraram para a concretização desta pesquisa, meu sincero reconhecimento.

REFERÊNCIAS

- APPADURAI, M. *et al.* Finite element design and thermal analysis of an induction motor used for a hydraulic pumping system. **Materials Today: Proceedings**, v. 45, p. 7100 – 7106, 2020. ISSN 22147853.
- BRITO, R. F. Simulação Numérica da Transferência de Calor e do Escoamento de Fluidos. 1999. 366 p. Dissertação (Engenharia Mecânica) — UNIFEI.
- CARVALHO, S. R. Determinação do Campos de Temperatura em Ferramentas de Corte Durante um Processo de Usinagem por Torneamento. 2005. Tese (Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia.
- CHEN, X.; HAO, Z. Biomimetic layered fiber-reinforced Ti–Al composites: Effects of vari-ous- parameters on their strength and ductility through finite elementanalysis. **Materials & Design**, v. 209, 2021.
- CUI, M. *et al.* A modified Levenberg–Marquardt algorithm for simultaneousestimation of multi- parameters of boundary heat flux by solvingtransient nonlinear inverse heat conduction problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 87, p. 908 – 916, 2016. ISSN 00179310.
- CUI, M. *et al.* A new approach for determining damping factors in Levenberg-Marquardt al-gorithm for solving an inverse heat conduction problem. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 107, p. 747 – 754, 2017. ISSN 00179310.
- GRZESIK, W. *et al.* Finite Difference Analysis of the Thermal Behavior of Coated toll in Orthogonal Cutting of Steels. **International Journal of Machining Tools and Manufacture**, v. 44, p. 1451 – 1462, 2004.
- GRZESIK, W. *et al.* Modeling of the Cutting Processss Analytical and Simulation Methods. **Advances ins Manufacturing Science and Technology**, v. 33, p. 5 – 29, 2009.
- GU, W. *et al.* Thermal oxidation behavior of WC-Co hard metal machining tool tip scraps. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 212, n. 6, 2012. ISSN 09240136.
- JIANG, F. *et al.* Estimation of Temperature-Dependent Heat Transfer Coefficients in Near-Dry Cutting. **International Journal of Advanced Manufacturing Tehcnology**, v. 86, p. 1207 – 1218, 2016.
- KENDALL, G. Would your mobile phone be powerful enough to get you to the moon? 2019. Disponível em: https://www.spacedaily.com/reports/Would_your_mobile_phone_be_powerful_enough_to_get_you_to_the_moon_99.html. Acesso em: 31/09/2021.

LEE, S. *et al.* Investigation on failure analysis and optimization of WC–Co hard metals after long-term use in a bottle cap forming machine. **International Journal of Refractory Metals and Hard Materials**, v. 74, p. 99 – 106, 2018. ISSN 22133917.

LEVENBERG, K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least. *Quart. Appl. Math.*, p. 164 – 168, 1944.
MACHADO, A. R.; SILVA, M. B. da. *Usinagem dos Metais*. 8. ed. Uberlândia: [s.n.], 2004.

MARQUARDT, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 11(2), 431–441, 1963.

SAMPAIO, P. A stabilized finite element method for incompressible flow and heat transfer: A natural derivation based on the use of local time-steps. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 6177 – 6190, 2006. ISSN 00457825.

SODRÉ, U. *Equações Diferenciais Parciais*. 2003. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>. Acesso em: 31/09/2021.

TORRES, V. *et al.* Estimation of distributed heat flux parameters in localized heating processes. **International Journal of Thermal Science**, v. 116, 2021. ISSN 12900729.

VEGA-SUAREZ, J. *et al.* Thermal conductivities estimation in orthotropic materials making use of global optimization algorithms. **DYNA (Colombia)**, v. 85, n. 205, p. 140 – 147, 2018. ISSN 00127353.

WU, S. *et al.* Risk assessment of vertebral compressive fracture using bone mass index and strength predicted by computed tomography image based finite element analysis. **Clinical Bio-mechanics**, v. 85, 2021. ISSN 18791271.