



# SUMÁRIO

<b>Prefácio</b> .....	XIII
<b>Capítulo 1</b> Introdução, definição e propriedades dos fluidos .....	1
1.1 Introdução .....	1
1.2 Conceitos fundamentais e definição de fluido .....	1
1.3 Tensão de cisalhamento — Lei de Newton da viscosidade .....	3
1.4 Viscosidade absoluta ou dinâmica .....	4
1.5 Simplificação prática .....	5
1.6 Massa específica ( $\rho$ ) .....	8
1.7 Peso específico ( $\gamma$ ) .....	8
1.8 Peso específico relativo para líquidos ( $\gamma_r$ ) .....	9
1.9 Viscosidade cinemática ( $\nu$ ) .....	9
1.10 Fluido ideal .....	10
1.11 Fluido ou escoamento incompressível .....	10
1.12 Equação de estado dos gases .....	10
Exercícios .....	11
<b>Capítulo 2</b> Estática dos fluidos .....	18
2.1 Pressão .....	18
2.2 Teorema de Stevin .....	19
2.3 Pressão em torno de um ponto de um fluido em repouso .....	20
2.4 Lei de Pascal .....	21
2.5 Carga de pressão .....	22
2.6 Escalas de pressão .....	23
2.7 Unidades de pressão .....	24
2.8 O barômetro .....	25
2.9 Medidores de pressão .....	26
2.9.1 Manômetro metálico ou de Bourdon .....	26
2.9.2 Coluna piezométrica ou piezômetro .....	27
2.9.3 Manômetro com tubo em U .....	27
2.9.4 A equação manométrica .....	28

2.10	Força numa superfície plana submersa	30
2.11	Centro das pressões	32
2.12	Força em superfícies reversas, submersas	35
	2.12.1 Componente horizontal	35
	2.12.2 Componente vertical	36
2.13	Empuxo	36
2.14	Flutuador — Nomenclatura	37
2.15	Estabilidade	38
2.16	Estabilidade vertical	38
	2.16.1 Corpo totalmente submerso em equilíbrio	38
	2.16.2 Corpo parcialmente submerso em equilíbrio	38
2.17	Estabilidade à rotação	39
	2.17.1 Corpo totalmente submerso, em equilíbrio	39
	2.17.2 Corpo parcialmente submerso, em equilíbrio	40
2.18	Equilíbrio relativo — Introdução	43
2.19	Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado segundo a horizontal	43
2.20	Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado segundo a vertical	46
2.21	Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado ao longo de um plano inclinado	46
2.22	Recipiente com movimento de rotação de velocidade angular $\omega$ constante	48
	Exercícios	50
<b>Capítulo 3</b>	<b>Cinemática dos fluidos</b>	<b>67</b>
3.1	Regimes ou movimentos variado e permanente	67
3.2	Escoamentos laminar e turbulento	68
3.3	Trajectoria e linha de corrente	69
3.4	Escoamento unidimensional ou uniforme na seção	71
3.5	Vazão — Velocidade média na seção	72
3.6	Equação da continuidade para regime permanente	74
3.7	Velocidade e aceleração nos escoamentos de fluidos	76
	Exercícios	78
<b>Capítulo 4</b>	<b>Equação da energia para regime permanente</b>	<b>85</b>
4.1	Introdução	85
4.2	Tipos de energias mecânicas associadas a um fluido	85
4.3	Equação de Bernoulli	87
4.4	Equação da energia e presença de uma máquina	90
4.5	Potência da máquina e noção de rendimento	92
4.6	Equação da energia para fluido real	95
4.7	Diagrama de velocidades não-uniforme na seção	97
4.8	Equação da energia para diversas entradas e saídas e escoamento em regime permanente de um fluido incompressível, sem trocas de calor	100
4.9	Interpretação da perda de carga	102
4.10	Equação da energia geral para regime permanente	105
	Exercícios	107



# CAPÍTULO 1

## Introdução, definição e propriedade dos fluidos

### 1.1 Introdução

Mecânica dos Fluidos é a ciência que estuda o comportamento físico dos fluidos, assim como as leis que regem esse comportamento.

As bases lançadas pela Mecânica dos Fluidos são fundamentais para muitos ramos de aplicação da engenharia. Dessa forma, o escoamento de fluidos em canais e condutos, a lubrificação, os esforços em barragens, os corpos flutuantes, as máquinas hidráulicas, a ventilação, a aerodinâmica e muitos outros assuntos lançam mão das leis da Mecânica dos Fluidos para obter resultados de aplicação prática.

Como se pode observar, pelo exposto, poucos são os ramos da engenharia que escapam totalmente do conhecimento dessa ciência que se torna, assim, uma das de maior importância entre as que devem fazer parte dos conhecimentos básicos do engenheiro.

### 1.2 Conceitos fundamentais e definição de fluido

A definição de fluido é introduzida, normalmente, pela comparação dessa substância com um sólido. A definição mais elementar diz: *Fluido é uma substância que não tem uma forma própria, assume o formato do recipiente.* A Figura 1.1 ilustra o significado desse enunciado.

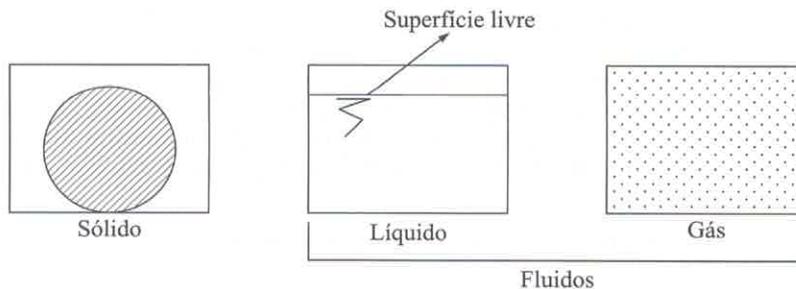


Figura 1.1

Os fluidos são, portanto, os líquidos e os gases, sendo que estes ainda se distinguem dos primeiros por ocuparem todo o recipiente, enquanto os líquidos apresentam uma superfície livre.

Se o problema fundamental fosse apenas reconhecer os fluidos, a definição apresentada seria perfeitamente suficiente para essa finalidade. Entretanto, é possível introduzir uma outra que, apesar de ser mais complexa, permite construir uma estrutura lógica que será de grande utilidade para o desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos.

Essa definição está novamente ligada à comparação de comportamento entre um sólido e um fluido, por uma observação prática denominada “Experiência das Duas Placas”, descrita a seguir.

Seja um sólido preso entre duas placas planas, uma inferior fixa e outra superior solicitada por uma força tangencial  $F_t$  (na direção do plano da placa) (Figura 1.2a).

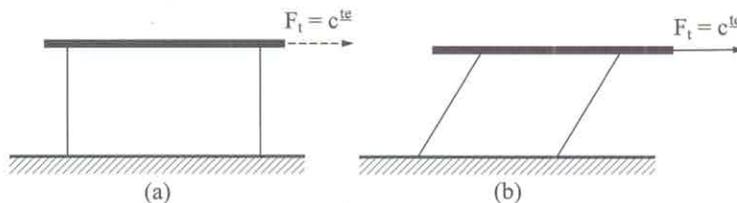


Figura 1.2

Mantida a força  $F_t$  constante, nota-se que o sólido se deforma angularmente (Figura 1.2b) até alcançar uma nova posição de equilíbrio estático. Nessa posição, as tensões internas equilibram a força externa aplicada e somente uma variação da força  $F_t$  faria com que houvesse uma modificação da nova configuração do sólido.

Pode-se dizer, então, que um sólido, solicitado por uma força tangencial constante, deforma-se angularmente, mas atinge uma nova configuração de equilíbrio estático (Figura 1.2b).

A mesma experiência será agora realizada colocando-se um fluido entre as placas. Suponha que seja possível, por exemplo, por meio de um corante, visualizar um certo volume ABCD do fluido (Figura 1.3a). Sendo a placa inferior fixa e a superior móvel, ao se aplicar a força tangencial  $F_t$  na placa superior, esta irá se deslocar.

A primeira observação importante nessa experiência é que pontos correspondentes do fluido e da placa continuam em correspondência durante o movimento; assim, se a placa superior adquire uma velocidade  $\vec{v}$ , os pontos do fluido em contato com ela terão a mesma velocidade  $\vec{v}$ , e os pontos do fluido em contato com a placa fixa ficarão parados junto dela. Tal observação conduz ao chamado princípio da aderência: *Os pontos de um fluido, em contato com uma superfície sólida, aderem aos pontos dela, com os quais estão em contato.*

Então, o que se observa é que o volume ABCD de fluido, sob a ação da força  $F_t$ , deforma-se continuamente, não alcançando uma nova posição de equilíbrio estático, supondo-se as placas de comprimento infinito.

Essa experiência permite a distinção entre sólidos e fluidos, pois, enquanto aqueles se deformam limitadamente sob a ação de esforços tangenciais pequenos, estes se deformam continuamente sem alcançar uma nova posição de equilíbrio estático.

Pode-se então dizer que: *Fluido é uma substância que se deforma continuamente, quando submetida a uma força tangencial constante qualquer ou, em outras palavras, fluido é uma substância que, submetida a uma força tangencial constante, não atinge uma nova configuração de equilíbrio estático.*

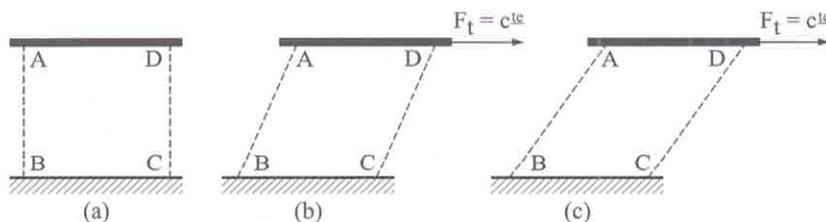


Figura 1.3

### 1.3 Tensão de cisalhamento — Lei de Newton da viscosidade

Da experiência realizada para definir fluido podem-se obter outras importantes conclusões que serão descritas neste item. Antes de tudo, será definida a tensão de cisalhamento.

Seja uma força  $\vec{F}$  aplicada sobre uma superfície de área  $A$  (Figura 1.4). Essa força pode ser decomposta segundo a direção da normal à superfície e a da tangente, dando origem a uma componente normal e outra tangencial.

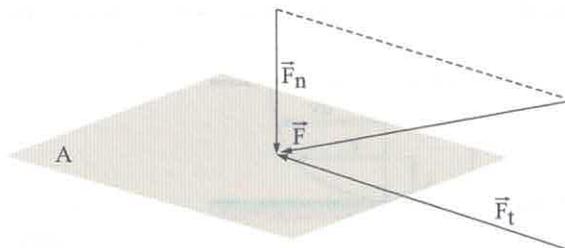


Figura 1.4

Define-se tensão de cisalhamento média como sendo o quociente entre o módulo da componente tangencial da força e a área sobre a qual está aplicada.

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (1.1)$$

Em outras palavras: tensão de cisalhamento  $\tau$  é a força tangencial por unidade de área. As unidades mais utilizadas para essa grandeza serão o  $\text{kgf}/\text{m}^2$  do sistema MK\*S (Técnico), o  $\text{dina}/\text{cm}^2$  (CGS) e o  $\text{N}/\text{m}^2$  (SI).

A seguir será descrito outro fato notável que pode ser observado na experiência das duas placas.

A placa superior é inicialmente acelerada pela força  $F_1$ , fato facilmente observável, já que passa da velocidade nula para uma velocidade finita. Nota-se, porém, que a partir de um certo instante a placa superior adquire uma velocidade  $v_0$  constante. Isso demonstra que a força externa  $F_1$  aplicada na placa é equilibrada por forças internas ao fluido, visto que, não existindo aceleração, pela segunda lei de Newton da dinâmica, a resultante das forças deverá ser nula (equilíbrio dinâmico).

Como aparecem essas forças internas? Para responder a essa pergunta, deve-se lembrar o princípio da aderência. Segundo ele, o fluido junto à placa superior irá se deslocar com velocidade  $v_0$ , enquanto aquele junto à placa inferior estará com velocidade nula. As camadas intermediárias deverão se adaptar às extremas, adquirindo velocidades que variam desde  $v_0$  até zero (Figura 1.5).

Em cada seção normal às placas, como a seção AB genérica, irá se formar um diagrama de velocidades, onde cada camada do fluido desliza sobre a adjacente com uma certa velocidade relativa. Como o leitor já deve ter percebido, esse fato cria uma espécie de atrito entre as diversas camadas do fluido.

Tal deslizamento entre camadas origina tensões de cisalhamento, que, multiplicadas pela área da placa, originam uma força tangencial interna ao fluido, responsável pelo equilíbrio da força  $F_1$  externa, o que fará com que a placa superior assuma uma velocidade constante  $v_0$ .

A Figura 1.5b mostra o aparecimento de  $\tau$  devido à velocidade relativa  $v_1 - v_2$ , que cria um escorregamento entre as duas camadas indicadas.

Newton descobriu que em muitos fluidos a tensão de cisalhamento é proporcional ( $\alpha$ ) ao gradiente da velocidade, isto é, à variação da velocidade com  $y$ .

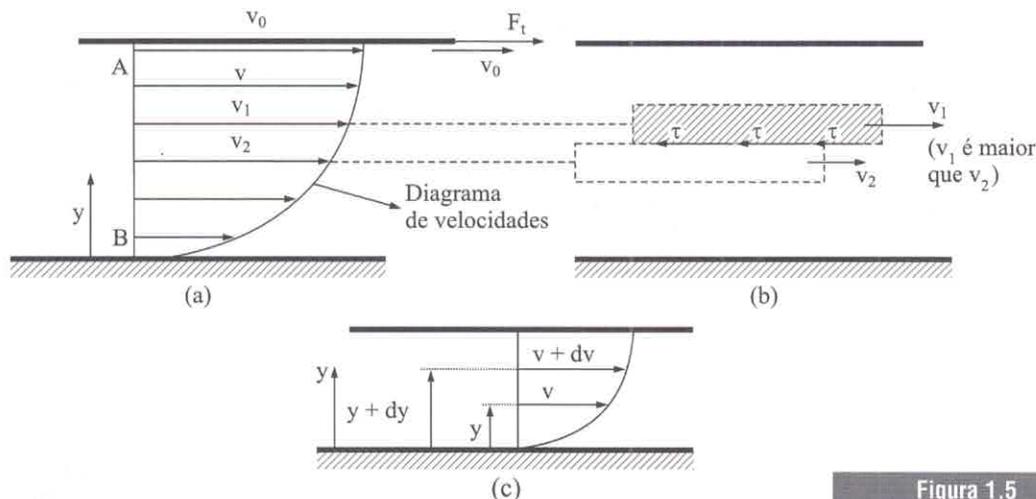


Figura 1.5

Disso pode-se traduzir a lei de Newton da viscosidade:

$$\tau \propto \frac{dv}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = c^{\text{te}} \quad (1.2)$$

Os fluidos que obedecem a essa lei são ditos fluidos newtonianos.

Os fluidos que se comportam de forma a obedecer à Equação 1.2 são a grande maioria, como água, ar, óleos etc., e os restantes, chamados não-newtonianos, não serão abordados neste estudo, pois são de pequeno interesse geral, sendo objeto apenas de estudos muito especializados.

## 1.4 Viscosidade absoluta ou dinâmica

A lei de Newton da viscosidade impõe uma proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento e o gradiente da velocidade. Tal fato leva à introdução de um coeficiente de proporcionalidade na Equação 1.2. Tal coeficiente será indicado por  $\mu$  e denomina-se viscosidade dinâmica ou absoluta.

A Equação 1.2 ficará então:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.3)$$

Essa grandeza  $\mu$  é uma propriedade de cada fluido e de suas condições, como, por exemplo, a pressão e, principalmente, a temperatura.

A origem da viscosidade nos fluidos mereceria uma análise microscópica que não será feita neste estudo. De forma simplificada, pode-se dizer que a viscosidade dos fluidos é originada por uma coesão entre as moléculas e pelos choques entre elas. Uma forma de visualizar a existência da viscosidade é retornar à Experiência das Duas Placas. Verificou-se que, após um certo tempo de aplicação da força  $F_t$  ( $c^{\text{te}}$ ) na placa superior, esta assume uma velocidade  $v_0$  constante, pelo equilíbrio dinâmico da força externa por forças desenvolvidas internamente.

A viscosidade, portanto, não é uma propriedade observável num fluido em repouso, pois, qualquer que seja a força tangencial, ele se deforma. Com o movimento do fluido, porém, ela faz sentir seu efeito, criando as condições para equilibrar a força  $F_t$  externa.

Pode-se dizer, então, que viscosidade dinâmica é a propriedade dos fluidos que permite equilibrar, dinamicamente, forças tangenciais externas quando os fluidos estão em movimento. Matematicamente,  $\mu$  é a constante de proporcionalidade da lei de Newton da viscosidade. De uma forma mais prática: *Viscosidade é a propriedade que indica a maior ou a menor dificuldade de o fluido escoar (escorrer).*

As unidades da viscosidade podem ser obtidas por análise dimensional a partir da lei de Newton da viscosidade. Adotando como grandezas fundamentais FLT:

$$[\tau] = \frac{\text{Força}}{\text{Área}} = \frac{F}{L^2} = FL^{-2}$$

$$\left[ \frac{dv}{dy} \right] = \frac{L}{T} = T^{-1} \quad \text{mas} \quad \tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}$$

$$\text{logo: } [\mu] = \frac{FL^{-2}}{T^{-1}} = FL^{-2}T$$

$$\text{MK*S (Técnico)} \longrightarrow \text{un } \mu = \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

$$\text{MKS Giorgi ou SI} \longrightarrow \text{un } \mu = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

$$\text{CGS} \longrightarrow \text{un } \mu = \frac{\text{dina} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \text{poise}$$

Utiliza-se ainda o centipoise: 1 cpoise = 0,01 poise.

Note-se que a viscosidade dinâmica possui um valor diferente para cada fluido e varia, para um mesmo fluido, principalmente em relação à temperatura. Os gases e os líquidos comportam-se de maneiras diferentes quanto a esse aspecto.

Nos líquidos, a viscosidade diminui com o aumento da temperatura, enquanto nos gases a viscosidade aumenta com o aumento da temperatura. A razão desse comportamento exige uma análise microscópica que não será abordada.

## 1.5 Simplificação prática

Viu-se que a lei de Newton da viscosidade é escrita da seguinte forma:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

onde  $\frac{dv}{dy}$  é o gradiente da velocidade ou variação de  $v$  com  $y$  (Figura 1.6).

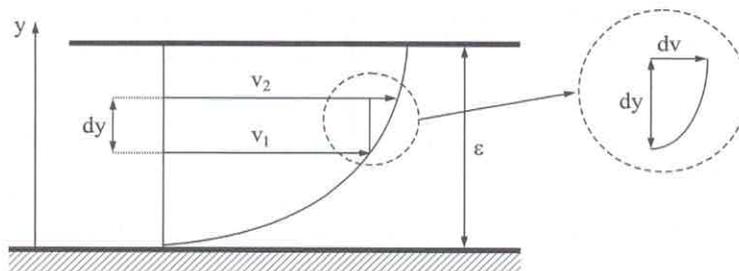


Figura 1.6

Pela figura, observa-se que, a um deslocamento  $dy$ , na direção do eixo  $y$ , corresponde uma variação  $dv$  da velocidade.

Quando a distância  $\varepsilon$  é pequena, pode-se considerar, sem muito erro, que a variação de  $v$  com  $y$  seja linear (Figura 1.7).

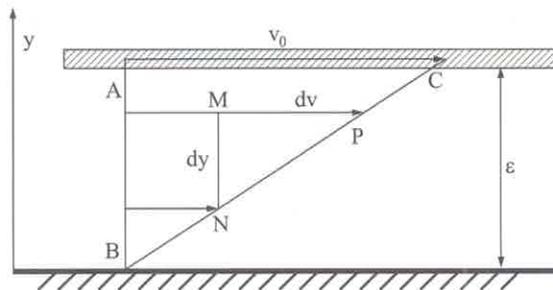


Figura 1.7

A simplificação que resulta desse fato é a seguinte:  $\Delta ABC \approx \Delta MNP$ . Logo:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{\varepsilon}$$

ou, de uma forma mais geral:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

ficando a lei de Newton:

$$\tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = \mu \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (1.4)$$

Esse fato leva a simplificações importantes nos problemas, evitando hipóteses e integrações às vezes complicadas.

### EXEMPLO

Um pistão de peso  $G = 4 \text{ N}$  cai dentro de um cilindro com uma velocidade constante de  $2 \text{ m/s}$ . O diâmetro do cilindro é  $10,1 \text{ cm}$  e o do pistão é  $10,0 \text{ cm}$ . Determinar a viscosidade do lubrificante colocado na folga entre o pistão e o cilindro.

Solução

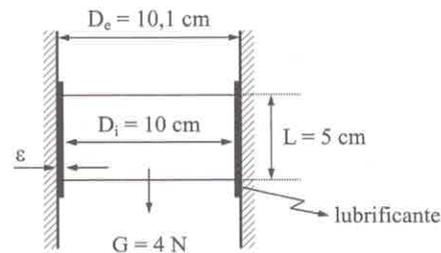
Se  $\vec{v} = c^{te} \Rightarrow \vec{a} = 0$ , logo, o pistão está em equilíbrio dinâmico, isto é:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Na direção do movimento, a força causada pelas tensões de cisalhamento  $F_\mu$  deve equilibrar o peso  $G$ , na velocidade dada.

$$\begin{aligned} \text{Logo,} \quad & F_\mu = G \\ \text{ou} \quad & \tau A = G \\ \text{ou} \quad & \mu \frac{dv}{dy} \pi D_1 L = G \end{aligned}$$

Sendo a distância  $\varepsilon = \frac{D_c - D_l}{2} = \frac{10,1 - 10}{2} = 0,05 \text{ cm}$  muito pequena, adota-se um diagrama linear de velocidades.



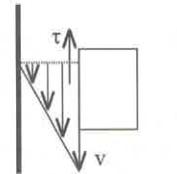
Nesse caso,

$$\mu \frac{v}{\epsilon} \pi D_i L = G$$

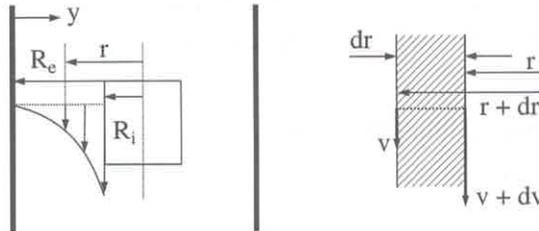
logo,

$$\mu = \frac{\epsilon G}{v \pi D_i L}$$

$$\mu = \frac{0,05 \times 10^{-2} \times 4}{2\pi \times 0,1 \times 0,05} = 6,37 \times 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$$



A seguir, o problema será resolvido também para o caso em que o diagrama não é linear.



Adotando-se uma coordenada polar  $R_i \leq r \leq R_e$ , para uma camada de espessura  $dr$ , a velocidade varia de  $v + dv$  para  $v$ , criando o escorregamento que gera as tensões de cisalhamento.

Logo,  $\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$ , pois para um  $dr$  positivo o  $v$  varia de um  $dv$  negativo.

Como cada camada se desloca com  $v = c^{\text{te}}$ , isso significa que o peso, transmitido no contato com a primeira camada, equilibra-se com as tensões de cisalhamento um  $dr$  adiante.

Assim, para uma camada genérica:

$$\tau A = G \quad \text{ou} \quad -\mu \frac{dv}{dr} 2\pi r L = G$$

ou, separando as variáveis:

$$2\pi L \mu dv = -\frac{G dr}{r}$$

Integrando de  $R_i$  a  $R_e$ , quando  $v$  varia de  $v$  a 0:

$$\int_v^0 2\pi L \mu dv = -\int_{R_i}^{R_e} G \frac{dr}{r}$$

$$-2\pi L \mu v = -G \ln \frac{R_e}{R_i}$$

$$\mu = \frac{G}{2\pi L v} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

ou

$$\mu = \frac{G}{2\pi L v} \ln \frac{D_e}{D_i}$$

$$\mu = \frac{4}{2\pi \times 0,05 \times 2} \ln \frac{10,1}{10} = 6,33 \times 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$$

Note-se que esse seria o resultado correto. Então, o erro ao considerar o diagrama linear seria:

$$\text{Erro} = \frac{\mu_{\text{linear}} - \mu_{\text{real}}}{\mu_{\text{real}}} \times 100$$

$$\text{Erro} = \frac{6,37 \times 10^{-2} - 6,33 \times 10^{-2}}{6,33 \times 10^{-2}} \times 100 = 0,63\%$$

que é um erro desprezível, comprovando que, quando a espessura do fluido é pequena, pode-se utilizar um diagrama linear.

## 1.6 Massa específica ( $\rho$ )

No estudo realizado será considerado, salvo menção contrária, que os fluidos são um meio contínuo e homogêneo, de forma que as propriedades médias definidas coincidam com as propriedades nos pontos. Tal hipótese facilita o estudo e permite introduzir definições simples para todas as propriedades dos fluidos.

*Massa específica* é a massa de fluido por unidade de volume.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} m = \text{massa} \\ V = \text{volume} \end{array} \quad (1.5)$$

### Unidades

Por análise dimensional, utilizando FLT:

lei de Newton

$$m = \frac{F}{a}$$

$$[m] = \frac{F}{LT^{-2}} = FL^{-1}T^2$$

$$[V] = L^3$$

$$[\rho] = \frac{FL^{-1}T^2}{L^3} = FL^{-4}T^2$$

$$\text{Sistema MK*S} \longrightarrow \text{un } \rho = \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} = \frac{\text{utm}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Sistema MKS Giorgi ou SI} \longrightarrow \text{un } \rho = \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Sistema CGS} \longrightarrow \text{un } \rho = \frac{\text{dina} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}^4} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

## 1.7 Peso específico ( $\gamma$ )

*Peso específico* é o peso de fluido por unidade de volume.

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} G = \text{peso} \\ V = \text{volume} \end{array} \quad (1.6)$$

### Unidades

Por análise dimensional, tem-se:

$$[G] = F \quad [V] = L^3$$

$$[\gamma] = \frac{F}{L^3} = FL^{-3}$$

$$\text{Sistema MK*S} \longrightarrow \text{un } \gamma = \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Sistema MKS Giorgi ou SI} \longrightarrow \text{un } \gamma = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Sistema CGS} \longrightarrow \text{un } \gamma = \frac{\text{dina}}{\text{cm}^3}$$

Pode-se deduzir uma relação simples entre peso específico e massa específica:

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{mas} \quad G = mg$$

ou

$$\gamma = \frac{mg}{V} \quad \text{e} \quad \gamma = \rho g \quad (1.7)$$

## 1.8 Peso específico relativo para líquidos ( $\gamma_r$ )

É a relação entre o peso específico do líquido e o peso específico da água em condições padrão. Será adotado que

$$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1.000 \text{ kgf/m}^3 \cong 10.000 \text{ N/m}^3$$

Como a massa específica e o peso específico diferem por uma constante, conclui-se que a massa específica relativa e o peso específico relativo coincidem.

### EXEMPLO

O peso específico relativo de uma substância é 0,8. Qual será seu peso específico?

Solução

$$\gamma_r = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} \rightarrow \gamma = \gamma_r \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 0,8 \times 1.000 = 800 \text{ kgf/m}^3 \cong 8.000 \text{ N/m}^3$$

## 1.9 Viscosidade cinemática ( $\nu$ )

Por comodidade e por outras razões que aqui não serão expostas, convém dar um nome ao quociente  $\mu / \rho$  que, muitas vezes, aparecerá no decorrer do estudo.

*Viscosidade cinemática* é o quociente entre a viscosidade dinâmica e a massa específica.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.8)$$

### Unidades

Por análise dimensional, utilizando FLT, teremos:

$$[\mu] = \text{FL}^{-2}\text{T}$$

$$[\rho] = \text{FL}^{-4}\text{T}^2$$

Logo,

$$[\nu] = \frac{\text{FL}^{-2}\text{T}}{\text{FL}^{-4}\text{T}^2} = \text{L}^2\text{T}^{-1}$$

Sistema MK\*S  $\rightarrow$  un  $\nu = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Sistema MKS Giorgi ou SI  $\rightarrow$  un  $\nu = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Sistema CGS  $\rightarrow$  un  $\nu = \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} = \text{stoke (St)}$

Utiliza-se ainda o centistoke: 1 cSt = 0,01 St.

Das unidades, verifica-se que o nome — viscosidade cinemática — deve-se ao fato de essa grandeza não envolver força, mas somente comprimento e tempo, que são as grandezas fundamentais da Cinemática.

### 1.10 Fluido ideal

Fluido ideal é aquele cuja viscosidade é nula. Por essa definição conclui-se que é um fluido que escoar sem perdas de energia por atrito. É claro que nenhum fluido possui essa propriedade; no entanto, será visto no decorrer do estudo que algumas vezes será interessante admitir essa hipótese, ou por razões didáticas ou pelo fato de a viscosidade ser um efeito secundário do fenômeno.

### 1.11 Fluido ou escoamento incompressível

Diz-se que um fluido é incompressível se o seu volume não varia ao modificar a pressão. Isso implica o fato de que, se o fluido for incompressível, a sua massa específica não variará com a pressão.

É claro que na prática não existem fluidos nessas condições. Os líquidos, porém, têm um comportamento muito próximo a esse e na prática, normalmente, são considerados como tais. Mesmo os gases em certas condições, em que não são submetidos a variações de pressão muito grandes, podem ser considerados incompressíveis. Um dos exemplos práticos é o estudo de ventilação, em que, em geral, essa hipótese é aceitável.

É importante compreender que nenhum fluido deve ser julgado de antemão. Sempre que ao longo do escoamento a variação da massa específica  $\rho$  for desprezível, o estudo do fluido será efetuado pelas leis estabelecidas para fluidos incompressíveis.

### 1.12 Equação de estado dos gases

Quando o fluido não puder ser considerado incompressível e, ao mesmo tempo, houver efeitos térmicos, haverá necessidade de determinar as variações da massa específica  $\rho$  em função da pressão e da temperatura. De uma maneira geral, essas variações obedecem, para os gases, a leis do tipo

$$f(\rho, p, T) = 0$$

denominadas equações de estado.

Para as finalidades desse desenvolvimento, sempre que for necessário, o gás envolvido será suposto como 'gás perfeito', obedecendo à equação de estado:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{RT} \quad (1.9)$$

onde:

$p$  = pressão absoluta

$R$  = constante cujo valor depende do gás

$T$  = temperatura absoluta (lembrar que a escala absoluta é a escala Kelvin e  $K = ^\circ\text{C} + 273$ )

Para o ar, por exemplo,  $R \cong 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ K}$ .

Numa mudança do estado de um gás:

$$\frac{p_1}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.10)$$

O processo é dito isotérmico quando na transformação não há variação de temperatura. Nesse caso:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = c^{te} \quad (1.11)$$

O processo é dito isobárico quando na transformação não há variação de pressão. Nesse caso:

$$\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 = c^{te} \quad (1.12)$$

O processo é dito isocórico ou isométrico quando na transformação não há variação de volume. Nesse caso:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = c^{te} \quad (1.13)$$

O processo é dito adiabático quando na transformação não há troca de calor. Nesse caso:

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k} = c^{te} \quad (1.14)$$

onde  $k$  é a chamada constante adiabática cujo valor depende do gás. No caso do ar,  $k = 1,4$ .

### EXEMPLO

Numa tubulação escoo hidrogênio ( $k = 1,4$ ,  $R = 4.122 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ ). Numa seção (1),  $p_1 = 3 \times 10^5 \text{ N/m}^2(\text{abs})$  e  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ . Ao longo da tubulação, a temperatura mantém-se constante. Qual é a massa específica do gás numa seção (2), em que  $p_2 = 1,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2(\text{abs})$ ?

Solução

$$\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1 \quad \text{Logo:} \quad \rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}$$

$$T_1 = 30 + 273 = 303\text{K}$$

$$\text{Logo:} \quad \rho_1 = \frac{3 \times 10^5}{4122 \times 303} = 0,24 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Como:} \quad T_1 = T_2 \rightarrow \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{p_2}{p_1}$$

$$\text{Portanto:} \quad \rho_2 = 0,24 \times \frac{1,5 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 0,12 \text{ kg/m}^3$$

### EXERCÍCIOS

- 1.1 A viscosidade cinemática de um óleo é  $0,028 \text{ m}^2/\text{s}$  e o seu peso específico relativo é  $0,85$ . Determinar a viscosidade dinâmica em unidades dos sistemas MK\*S, CGS e SI ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

$$\text{Resp.:} \quad \mu_{\text{MK*S}} = 2,38 \text{ kgf.s/m}^2; \mu_{\text{CGS}} = 233 \text{ dina.s/cm}^2; \mu_{\text{SI}} = 23,3 \text{ N.s/m}^2$$

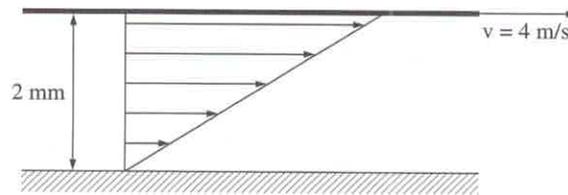
- 1.2 A viscosidade dinâmica de um óleo é  $5 \times 10^{-4} \text{ kgf.s/m}^2$  e o peso específico relativo é  $0,82$ . Determinar a viscosidade cinemática nos sistemas MK\*S, SI e CGS ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1.000 \text{ kgf/m}^3$ ).

$$\text{Resp.:} \quad \nu = 6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 6 \times 10^{-2} \text{ St}$$

- 1.3 O peso de  $3 \text{ dm}^3$  de uma substância é  $23,5 \text{ N}$ . A viscosidade cinemática é  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Se  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , qual será a viscosidade dinâmica nos sistemas CGS, MK\*S, SI e em  $\text{N.min/km}^2$ ?

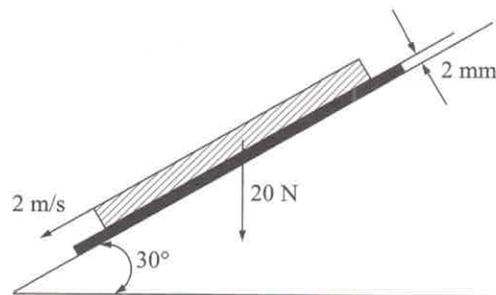
$$\text{Resp.:} \quad 7,83 \times 10^{-2} \text{ poise} = 8 \times 10^{-4} \text{ kgf.s/m}^2 = 7,83 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2 = 130,5 \text{ N.min/km}^2$$

- 1.4 São dadas duas placas planas paralelas à distância de 2 mm. A placa superior move-se com velocidade de 4 m/s, enquanto a inferior é fixa. Se o espaço entre as duas placas for preenchido com óleo ( $\nu = 0,1 \text{St}$ ;  $\rho = 830 \text{ kg/m}^3$ ), qual será a tensão de cisalhamento que agirá no óleo?



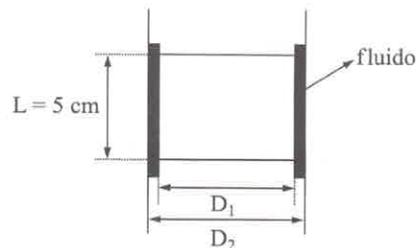
Resp.:  $\tau = 16,6 \text{ N/m}^2$

- 1.5 Uma placa quadrada de 1,0 m de lado e 20 N de peso desliza sobre um plano inclinado de  $30^\circ$ , sobre uma película de óleo. A velocidade da placa é 2 m/s constante. Qual é a viscosidade dinâmica do óleo, se a espessura da película é 2 mm?



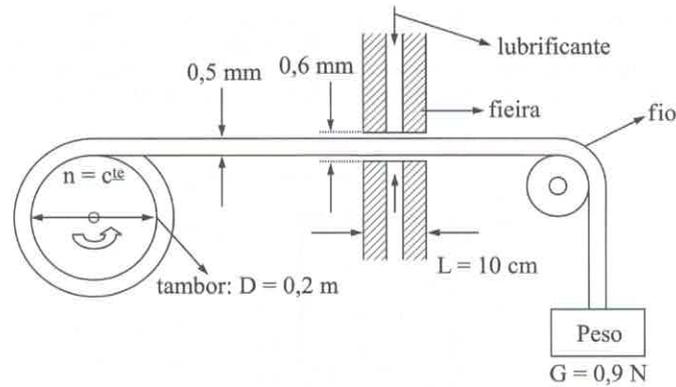
Resp.:  $\mu = 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$

- 1.6 O pistão da figura tem uma massa de 0,5 kg. O cilindro de comprimento ilimitado é puxado para cima com velocidade constante. O diâmetro do cilindro é 10 cm e do pistão é 9 cm e entre os dois existe um óleo de  $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $\gamma = 8.000 \text{ N/m}^3$ . Com que velocidade deve subir o cilindro para que o pistão permaneça em repouso? (Supor diagrama linear e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .)



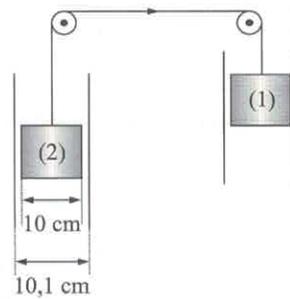
Resp.:  $v = 22,1 \text{ m/s}$

- 1.7 Num tear, o fio é esticado passando por uma fieira e é enrolado num tambor com velocidade constante, como mostra a figura. Na fieira, o fio é lubrificado e tingido por uma substância. A máxima força que pode ser aplicada no fio é 1 N, pois, ultrapassando-a, ele rompe. Sendo o diâmetro do fio 0,5 mm e o diâmetro da fieira 0,6 mm, e sendo a rotação do tambor 30 rpm, qual é a máxima viscosidade do lubrificante e qual é o momento necessário no eixo do tambor? (Lembrar que  $\omega = 2 \pi n$ .)



Resp.:  $M = 0,1 \text{ N.m}$ ;  $\mu = 0,1 \text{ N.s/m}^2$

- 1.8 O dispositivo da figura é constituído de dois pistões de mesmas dimensões geométricas que se deslocam em dois cilindros de mesmas dimensões. Entre os pistões e os cilindros existe um lubrificante de viscosidade dinâmica  $10^{-2} \text{ N.s/m}^2$ . O peso específico do pistão (1) é  $20.000 \text{ N/m}^3$ . Qual é o peso específico do pistão (2) para que o conjunto se desloque na direção indicada com uma velocidade de  $2 \text{ m/s}$  constante? Desprezar o atrito na corda e nas roldanas.

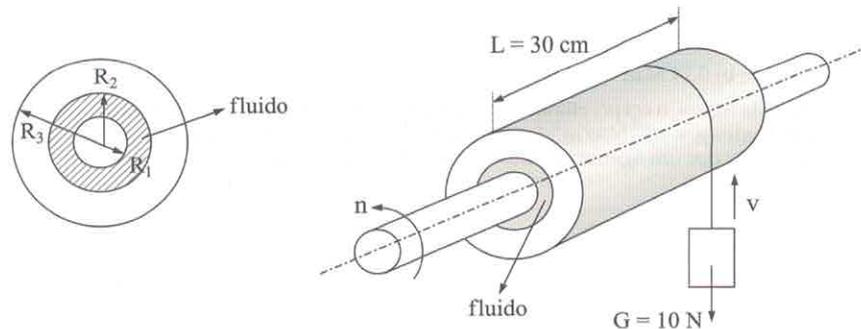


Resp.:  $\gamma_2 = 16.800 \text{ N/m}^3$

- 1.9 O eixo da figura, ao girar, provoca a rotação do tambor. Este enrola a corda, que levanta um peso de  $10 \text{ N}$  com uma velocidade constante de  $0,5 \text{ m/s}$ . O fluido existente entre o eixo e o tambor tem  $\mu = 0,1 \text{ N.s/m}^2$  e apresenta um diagrama linear de velocidades. Pede-se:

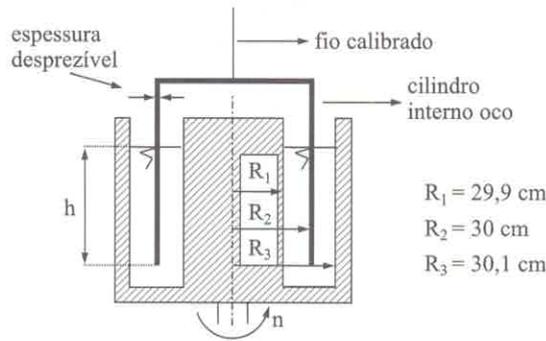
- a rotação do eixo em rpm;
- o momento provocado pelo fluido contra a rotação do eixo.

Dados:  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 10,1 \text{ cm}$ ;  $R_3 = 20 \text{ cm}$ ;  $\omega = 2 \pi n$ .



Resp.: a)  $n = 123,5 \text{ rpm}$ ; b)  $M_{\text{eixo}} = 1,96 \text{ N.m}$

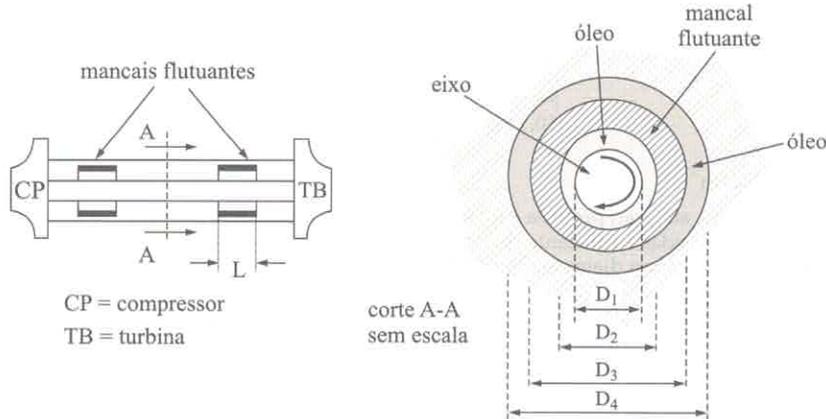
- 1.10 No viscosímetro da figura, o cilindro externo gira com uma rotação de 100 rpm constante. O cilindro interno é oco, sua parede tem espessura desprezível e está preso a um fio calibrado à torção. Esse cilindro gira torcendo o fio até que nele se atinja um momento de 10 N.m. Supondo o diagrama de velocidades linear e um líquido de viscosidade cinemática  $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , qual é a altura do líquido?



Resp.:  $h = 3,5 \text{ cm}$

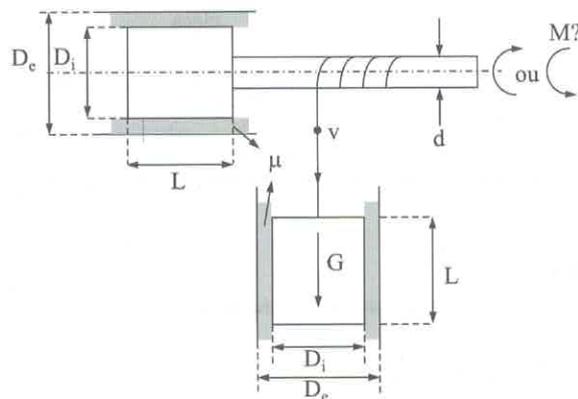
- 1.11 O turbocompressor de um motor de combustão interna tem uma rotação de 120.000 rpm ( $\omega = 2\pi n$ ). Os mancais do eixo são flutuantes e giram com uma certa rotação. São dados:  $\mu = 8 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$ ;  $D_1 = 12 \text{ mm}$ ;  $D_2 = 12,05 \text{ mm}$ ;  $D_3 = 15,05 \text{ mm}$ ;  $D_4 = 15,1 \text{ mm}$ ;  $L = 20 \text{ mm}$ . Na condição de equilíbrio dinâmico, na rotação dada, pede-se:

- a) a rotação do mancal flutuante;
- b) o momento resistente à rotação que age no eixo do turbocompressor relativo aos mancais.



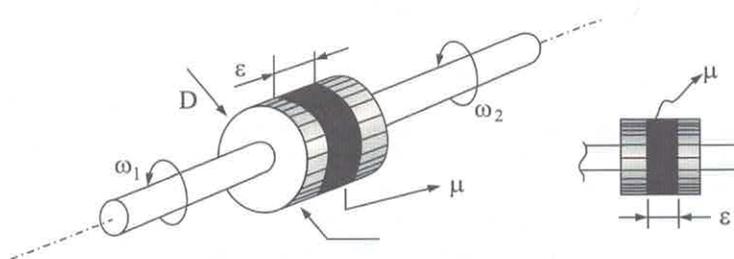
Resp.: a) 40.533 rpm; b) 0,14 N.m

- 1.12 No sistema da figura, o corpo cilíndrico de peso  $G$  desce com velocidade constante  $v = 2 \text{ m/s}$ , fazendo o eixo girar. Dados  $\mu = 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$ ;  $L = 2/\pi \text{ m}$ ;  $D_e = 50,2 \text{ cm}$ ;  $D_i = 50 \text{ cm}$ ;  $d = 10 \text{ cm}$ ;  $G = 50 \text{ N}$ , qual é o momento aplicado por um agente externo no eixo? É motor ou resistente?



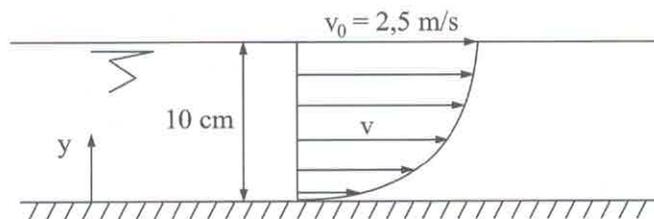
Resp.:  $M = 0,1 \text{ N.m}$  (motor)

- 1.13 Dois discos são dispostos coaxialmente face a face, separados por um filme de óleo lubrificante de espessura  $\epsilon$  pequena. Aplicando-se um momento no disco (1), ele inicia um movimento em torno de seu eixo e, através do fluido viscoso, estabelece-se o regime, de forma que as velocidades angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  ficam constantes. Admitindo o regime estabelecido, determinar a função  $\omega_1 - \omega_2 = f(M, \epsilon, D, \mu)$ .



Resp.:  $\omega_1 - \omega_2 = \frac{32 \epsilon M_i}{\pi D^4 \mu}$

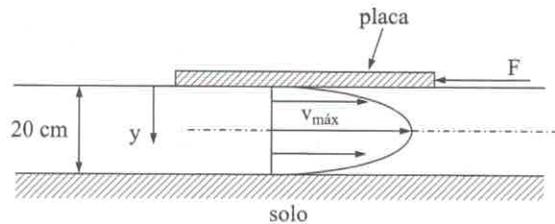
- 1.14 Assumindo o diagrama de velocidades indicado na figura, em que a parábola tem seu vértice a 10 cm do fundo, calcular o gradiente de velocidade e a tensão de cisalhamento para  $y = 0; 5; 10$  cm. Adotar  $\mu = 400$  centipoises.



Resp.:  $(50 \text{ s}^{-1}; 200 \text{ dina/cm}^2); (25 \text{ s}^{-1}; 100 \text{ dina/cm}^2); (0; 0)$

- 1.15 A placa da figura tem uma área de  $4 \text{ m}^2$  e espessura desprezível. Entre a placa e o solo existe um fluido que escoar, formando um diagrama de velocidades dado por  $v = 20y v_{\text{máx}} (1 - 5y)$ . A viscosidade dinâmica do fluido é  $10^{-2} \text{ N.s/m}^2$  e a velocidade máxima do escoamento é  $4 \text{ m/s}$ . Pede-se:

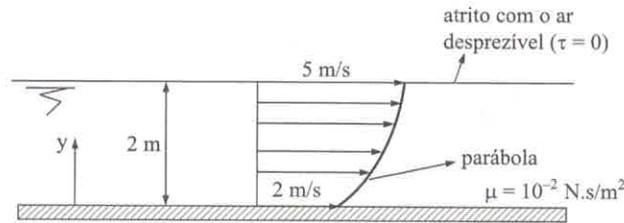
- o gradiente de velocidades junto ao solo;
- a força necessária para manter a placa em equilíbrio.



Resp.: a)  $-80 \text{ s}^{-1}$ ; b) 3,2 N

1.16 Um fluido escoia sobre uma placa com o diagrama dado. Pede-se:

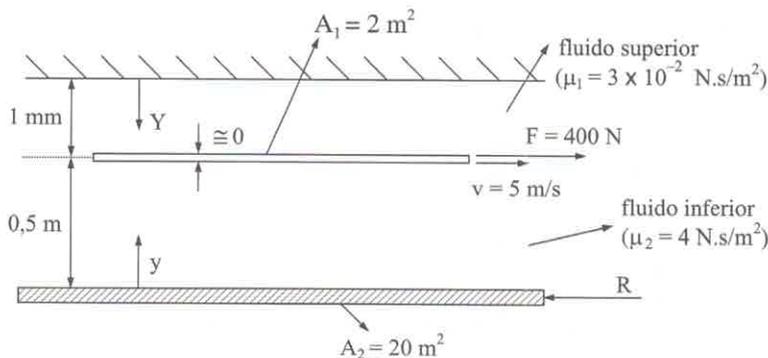
- a)  $v = f(y)$ ;
- b) a tensão de cisalhamento junto à placa.



Resp.: a)  $v = -0,75y^2 + 3y + 2$ ; b)  $t = 0,03 \text{ N/m}^2$

1.17 Na figura, uma placa de espessura desprezível e área  $A_1 = 2 \text{ m}^2$  desloca-se com  $v = 5 \text{ m/s}$  constante, na interface de dois fluidos, tracionada por uma força  $F = 400 \text{ N}$ . Na parte superior,  $\epsilon = 1 \text{ mm}$  e o diagrama de velocidades é considerado linear. Na parte inferior, o diagrama é dado por  $v = ay^2 + by + c$ . Pede-se:

- a) a tensão de cisalhamento na parte superior da placa em movimento;
- b) a tensão de cisalhamento na face inferior da mesma placa;
- c) a expressão do diagrama de velocidades  $v = f(Y)$  no fluido superior;
- d) a expressão do diagrama de velocidades no fluido inferior ( $v = f(y)$ );
- e) a força R que mantém a placa da base em repouso.



Resp.: a)  $150 \text{ N/m}^2$ ; b)  $50 \text{ N/m}^2$ ; c)  $v = 5.000Y$ ; d)  $v = 5y^2 + 7,5y$ ; e) 60 N

1.18 Ar escoia ao longo de uma tubulação. Em uma seção (1),  $p_1 = 200.000 \text{ N/m}^2$  (abs) e  $T_1 = 50^\circ\text{C}$ . Em uma seção (2),  $p_2 = 150.000 \text{ N/m}^2$  (abs) e  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Determinar a variação porcentual da massa específica de (1) para (2).

Resp.: 17,3%

1.19 Um gás natural tem peso específico relativo 0,6 em relação ao ar a  $9,8 \times 10^4$  Pa (abs) e  $15^\circ\text{C}$ . Qual é o peso específico desse gás nas mesmas condições de pressão e temperatura? Qual é a constante R desse gás? ( $R_{\text{ar}} = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ ;  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ )

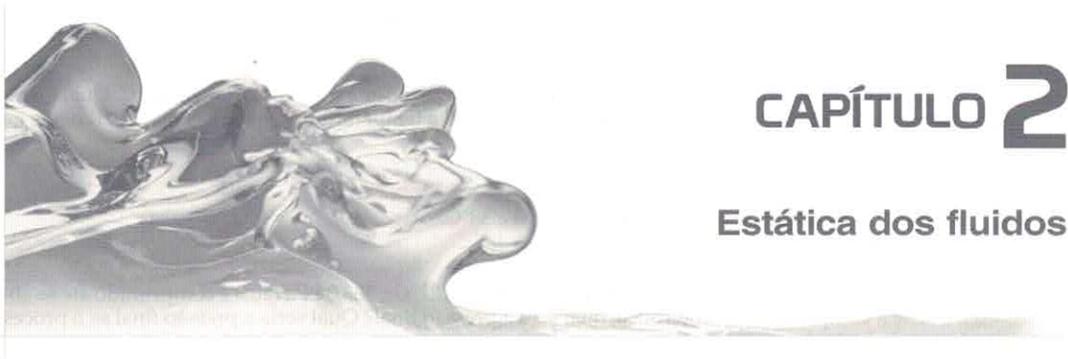
Resp.:  $\gamma = 7 \text{ N/m}^3$ ;  $R = 478 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$

1.20 Calcular o peso específico do ar a 441 kPa (abs) e  $38^\circ\text{C}$ .

Resp.:  $\gamma = 49,4 \text{ N/m}^3$

1.21 Um volume de  $10 \text{ m}^3$  de dióxido de carbono ( $k = 1,28$ ) a  $27^\circ\text{C}$  e 133,3 kPa (abs) é comprimido até se obter  $2 \text{ m}^3$ . Se a compressão for isotérmica, qual será a pressão final? Qual seria a pressão final se o processo fosse adiabático?

Resp.: 666,5 kPa (abs); 1,046 MPa (abs)



# CAPÍTULO 2

## Estática dos fluidos

### 2.1 Pressão

No Capítulo 1 foi visto que uma força aplicada sobre uma superfície pode ser decomposta em dois efeitos: um tangencial, que origina tensões de cisalhamento, e outro normal, que dará origem às pressões.

Se  $F_n$  representa a força normal que age numa superfície de área  $A$ , e  $dF_n$  a força normal que age num infinitésimo de área  $dA$ , a pressão num ponto será:

$$p = \frac{dF_n}{dA} \quad (2.1)$$

Se a pressão for uniforme, sobre toda a área, ou se o interesse for na pressão média, então:

$$p = \frac{F_n}{A} \quad (2.2)$$

O leitor não deve confundir pressão com força. Veja o exemplo da Figura 2.1.

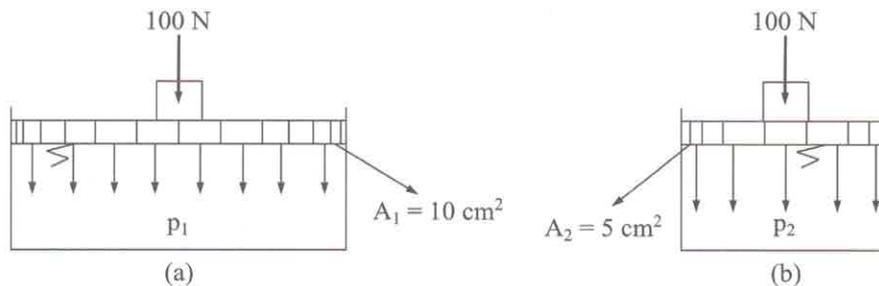


Figura 2.1

Note-se que a força aplicada em ambos os recipientes é a mesma; entretanto, a pressão será diferente. De fato:

Recipiente (a):

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{100 \text{ N}}{10 \text{ cm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Recipiente (b): 
$$p_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{100 \text{ N}}{5 \text{ cm}^2} = 20 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

## 2.2 Teorema de Stevin

A diferença de pressão entre dois pontos de um fluido em repouso é igual ao produto do peso específico do fluido pela diferença de cotas dos dois pontos.

Sejam um recipiente que contém um fluido e dois pontos genéricos M e N. Unindo os pontos M e N constrói-se um cilindro, cuja área da base é  $dA$ , em torno do eixo MN.

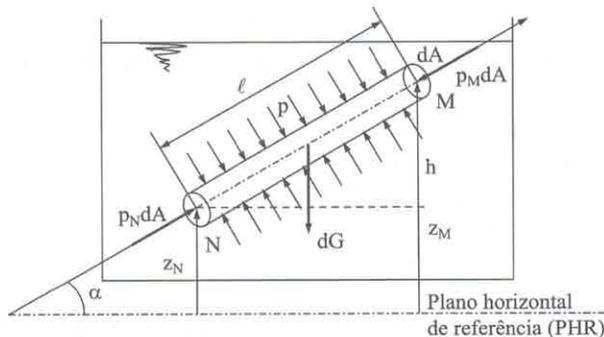


Figura 2.2

Orienta-se o eixo MN de N para M, e seja  $\alpha$  o ângulo formado com a horizontal.

Seja  $z_N$  a cota do ponto N e  $z_M$  a cota do ponto M, em relação a um plano horizontal qualquer, adotado como referência.

Seja  $h$  a diferença de cotas dos dois pontos, isto é,  $h = z_M - z_N$ .

Como, por hipótese, o fluido está em repouso, a resultante das forças que agem sobre o cilindro em qualquer direção deve ser nula, ou haveria um deslocamento nessa direção, contrariando a hipótese.

As forças que agem são:

$$dF_N = p_N dA \text{ no ponto N}$$

$$dF_M = p_M dA \text{ no ponto M}$$

$$F = \int p dA_\ell \text{ na superfície lateral}$$

$$dG = \text{peso do fluido contido no cilindro} = \text{volume de fluido} \times \text{peso específico} = \ell \cdot dA \cdot \gamma$$

Todas essas forças são projetadas na direção do eixo NM. Deve-se lembrar que, como as forças devidas à pressão são normais à superfície, então as que agem na superfície lateral terão componente nula sobre o eixo.

As outras forças projetadas, respeitando o sentido do eixo, resultam:

$$p_N dA - p_M dA - dG \text{ sen } \alpha = 0$$

ou

$$p_N dA - p_M dA - \gamma \ell dA \text{ sen } \alpha = 0$$

$$p_N - p_M = \gamma \ell \text{ sen } \alpha$$

mas

$$\ell \text{ sen } \alpha = h = z_M - z_N$$

ou

$$p_N - p_M = \gamma h = \gamma (z_M - z_N) \tag{2.3}$$

Logo, a diferença de pressão entre dois pontos genéricos é igual ao produto do peso específico do fluido pela diferença de cotas entre os dois pontos, como se queria demonstrar.

O que é importante notar ainda nesse teorema é que:

- na diferença de pressão entre dois pontos não interessa a distância entre eles, mas a diferença de cotas;
- a pressão dos pontos num mesmo plano ou nível horizontal é a mesma;
- o formato do recipiente não é importante para o cálculo da pressão em algum ponto.

Na Figura 2.3, em qualquer ponto do nível A, tem-se a mesma pressão  $p_A$ , e em qualquer ponto do nível B, tem-se a pressão  $p_B$ , desde que o fluido seja o mesmo em todos os ramos;

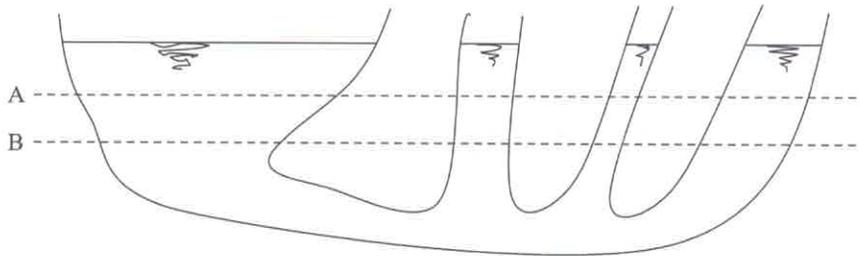


Figura 2.3

- se a pressão na superfície livre de um líquido contido num recipiente for nula, a pressão num ponto à profundidade  $h$  dentro do líquido será dada por:  $p = \gamma h$ ;

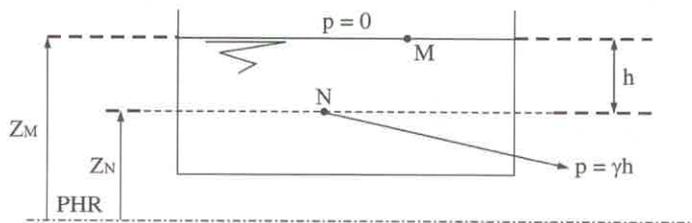


Figura 2.4

- nos gases, como o peso específico é pequeno, se a diferença de cota entre dois pontos não é muito grande, pode-se desprezar a diferença de pressão entre eles.

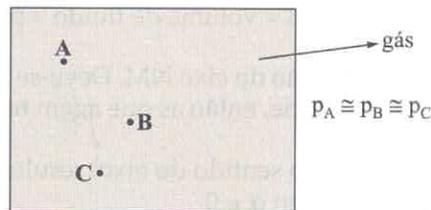


Figura 2.5

## 2.3 Pressão em torno de um ponto de um fluido em repouso

A pressão num ponto de um fluido em repouso é a mesma em qualquer direção.

Existem demonstrações rebuscadas para esse enunciado; como, porém, tais demonstrações não trazem nenhum subsídio aos conhecimentos, prefere-se apelar para a intuição do leitor.

Se o fluido está em repouso, todos os seus pontos também deverão estar. Se a pressão fosse diferente em alguma direção, haveria um desequilíbrio no ponto, fazendo com que este

se deslocasse nessa direção, contrariando a hipótese. Logo, se o fluido está em repouso, a pressão em torno de um ponto deve ser a mesma em qualquer direção (Figura 2.6).

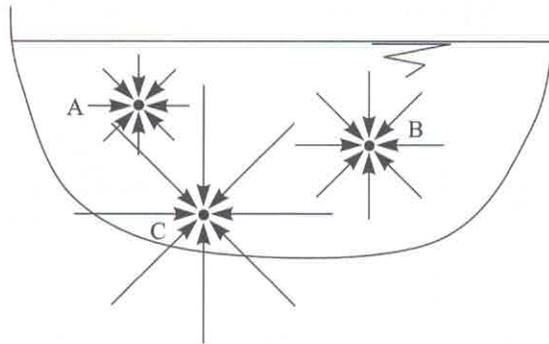


Figura 2.6

## 2.4 Lei de Pascal

*A pressão aplicada num ponto de um fluido em repouso transmite-se integralmente a todos os pontos do fluido.*

A Figura 2.7 ilustra perfeitamente tal fato:

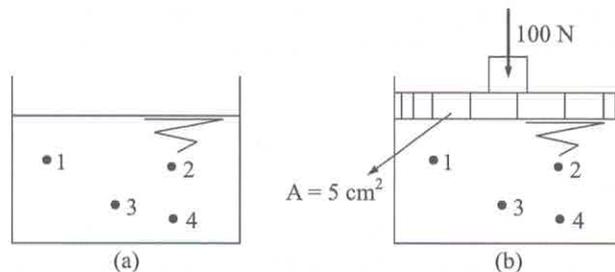


Figura 2.7

Em (a) e (b), mostra-se o mesmo recipiente cilíndrico em que foram escolhidos alguns pontos.

Em (a), o fluido apresenta uma superfície livre à atmosfera e supõe-se que as pressões nos pontos indicados sejam:

$$p_1 = 1 \text{ N/cm}^2; p_2 = 2 \text{ N/cm}^2; p_3 = 3 \text{ N/cm}^2 \text{ e } p_4 = 4 \text{ N/cm}^2.$$

Ao aplicar a força de 100 N, por meio do êmbolo da Figura 2.7b, tem-se um acréscimo de pressão de  $p = \frac{F}{A} = \frac{100}{5} = 20 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ . As pressões nos pontos indicados deverão, portanto, ter os seguintes valores:

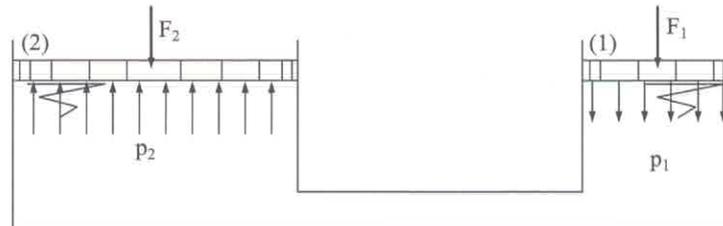
$$p_1 = 21 \text{ N/cm}^2; p_2 = 22 \text{ N/cm}^2; p_3 = 23 \text{ N/cm}^2 \text{ e } p_4 = 24 \text{ N/cm}^2.$$

Torna-se evidente, então, o significado da lei de Pascal.

Essa lei apresenta sua maior importância em problemas de dispositivos que transmitem e ampliam uma força através da pressão aplicada num fluido.

**EXEMPLO**

A figura mostra, esquematicamente, uma prensa hidráulica. Os dois êmbolos têm, respectivamente, as áreas  $A_1 = 10 \text{ cm}^2$  e  $A_2 = 100 \text{ cm}^2$ . Se for aplicada uma força de 200 N no êmbolo (1), qual será a força transmitida em (2)?



A pressão transmitida pelo êmbolo (1) será  $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ .

Mas, pela lei de Pascal, essa pressão será transmitida integralmente ao êmbolo (2), portanto  $p_2 = p_1$ .

Logo:

$$p_2 A_2 = p_1 A_2 = F_2$$

Como:  $p_1 = \frac{200}{10} = 20 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ , então  $F_2 = 20 \times 100 = 2.000 \text{ N}$

Nota-se, então, que se pode, por meio desse dispositivo, não só transmitir uma força, mas também ampliá-la. É nesse princípio que, na prática, baseiam-se: prensas hidráulicas, servomecanismos, dispositivos de controle, freios etc.

**2.5 Carga de pressão**

Foi visto pelo teorema de Stevin que altura e pressão mantêm uma relação constante para um mesmo fluido. É possível expressar, então, a pressão num certo fluido em unidade de comprimento, lembrando que:

$$\frac{P}{\gamma} = h \quad (2.4)$$

Essa altura  $h$ , que, multiplicada pelo peso específico do fluido, reproduz a pressão num certo ponto dele, será chamada 'carga de pressão'.

Para o leitor, essa definição torna-se evidente quando existe um recipiente em que se possa falar em profundidade ou altura  $h$  (Figura 2.8).

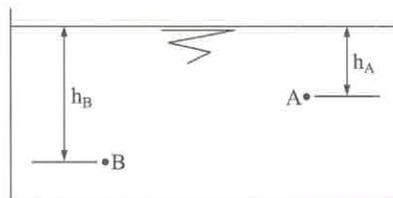


Figura 2.8

A pressão no ponto A será  $p_A = \gamma h_A$ , enquanto a carga de pressão será  $h_A$ ; da mesma forma, no ponto B,  $p_B = \gamma h_B$  e a carga de pressão será  $h_B$ . Será que só nesses casos é que se pode falar em carga de pressão? Vejamos como seria interpretada a carga de pressão no caso de uma tubulação.

Na Figura 2.9a tem-se, por exemplo, um tubo por onde escoo um fluido de peso específico  $\gamma$  e à pressão  $p$ . Supondo o diâmetro do tubo pequeno, a pressão do fluido em todos os pontos da seção transversal será aproximadamente a mesma. Como, porém, há uma pequena diferença, adotem-se como referência os pontos do eixo do tubo. Note-se que nesse caso existe uma pressão  $p$ , mas não há nenhuma altura  $h$ .

Será que ainda se pode falar em carga de pressão? Se possível, como deverá ser interpretada?

Abrindo-se um orifício no conduto, verifica-se que, se a pressão interna for maior que a externa, um jato de líquido será lançado para cima.

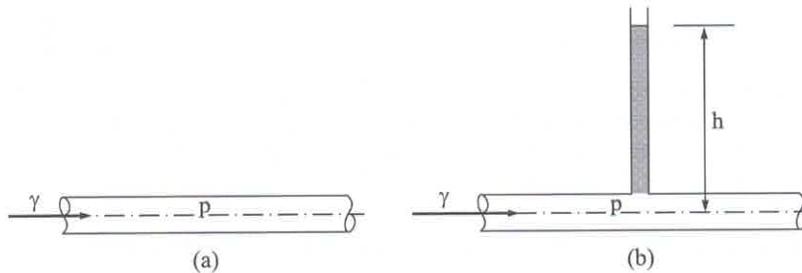


Figura 2.9

Se esse jato for canalizado por meio de um tubo de vidro, verifica-se que o líquido sobe até alcançar uma altura  $h$ . Essa coluna de líquido deverá, para ficar em repouso, equilibrar exatamente a pressão  $p$  do conduto. Dessa forma, novamente,

$$\gamma_{\text{fluido}} \times h_{\text{coluna}} = p_{\text{conduto}}$$

Nota-se então que o  $h$  da coluna é exatamente a carga de pressão de  $p$ . Logo, pode-se falar em carga de pressão independentemente da existência da profundidade  $h$ .

Pode-se dizer, então, que carga de pressão é a altura à qual pode ser elevada uma coluna de fluido por uma pressão  $p$ .

Dessa forma, é sempre possível, dada uma coluna  $h$  de fluido, associar-lhe uma pressão  $p$ , dada por  $\gamma h$ , assim como é possível, dada uma pressão  $p$ , associar-lhe uma altura  $h$  de fluido, dada por  $\frac{p}{\gamma}$ , denominada carga de pressão.

## 2.6 Escalas de pressão

Se a pressão é medida em relação ao vácuo ou zero absoluto, é chamada 'pressão absoluta'; quando é medida adotando-se a pressão atmosférica como referência, é chamada 'pressão efetiva'. A escala de pressões efetivas é importante, pois praticamente todos os aparelhos de medida de pressão (manômetros) registram zero quando abertos à atmosfera, medindo, portanto, a diferença entre a pressão do fluido e a do meio em que se encontram.

Se a pressão é menor que a atmosférica, costuma ser chamada impropriamente de vácuo e mais propriamente de depressão; é claro que uma depressão na escala efetiva terá um valor negativo. Todos os valores da pressão na escala absoluta são positivos.

A Figura 2.10 mostra, esquematicamente, a medida da pressão nas duas escalas, a efetiva e a absoluta.

Da discussão anterior e da Figura 2.10 verifica-se que vale a seguinte relação entre as escalas:

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{ef}} \quad (2.5)$$

onde  $p_{\text{ef}}$  pode ser positiva ou negativa.

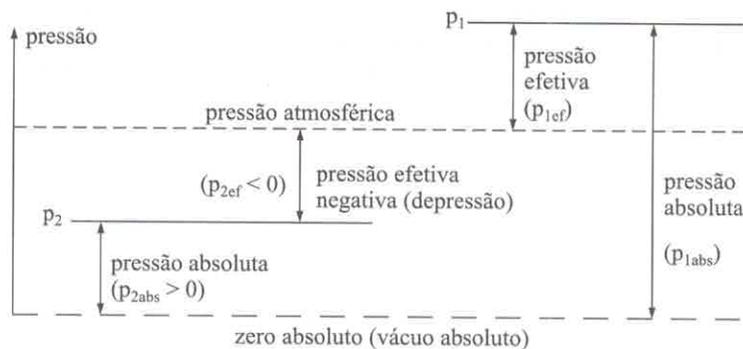


Figura 2.10

A pressão atmosférica é também chamada pressão barométrica e varia com a altitude. Mesmo num certo local, ela varia com o tempo, dependendo das condições meteorológicas.

Nos problemas que envolvem leis de estado de gases, é imprescindível o uso da escala absoluta, como foi visto no item 1.12 do Capítulo 1.

Em problemas envolvendo líquidos, o uso da escala efetiva é mais cômodo, pois, nas equações, a pressão atmosférica, em geral, aparece nos dois membros, podendo ser cancelada.

Sempre que for utilizada a escala absoluta, após a unidade de pressão será indicada a abreviação (abs), enquanto, ao se usar a escala efetiva, nada será indicado.

## 2.7 Unidades de pressão

As unidades de pressão podem ser divididas em três grupos:

- a) Unidades de pressão propriamente ditas, baseadas na definição ( $F/A$ ).

Entre elas, as mais utilizadas são:  $\text{kgf}/\text{m}^2$ ;  $\text{kgf}/\text{cm}^2$ ;  $\text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$  (pascal);  $\text{daN}/\text{cm}^2 = \text{bar}$  (decanewton por centímetro quadrado);  $\text{lb}/\text{pol}^2 = \text{psi}$  (*pounds per square inches* = libras por polegada ao quadrado).

A relação entre essas unidades é facilmente obtida por uma simples transformação:  $1 \text{ kgf}/\text{cm}^2 = 10^4 \text{ kgf}/\text{m}^2 = 9,8 \times 10^4 \text{ Pa} = 0,98 \text{ bar} = 14,2 \text{ psi}$ .

- b) Unidades de carga de pressão utilizadas para indicar a pressão.

Essas unidades são indicadas por uma unidade de comprimento seguida da denominação do fluido que produziria a carga de pressão (ou coluna) correspondente à pressão dada.

Lembrar, pelo item 2.5, que existe uma correspondência biunívoca entre  $p$  e  $h$ , através do peso específico  $\gamma$  do fluido. Assim, por exemplo:

mmHg (milímetros de coluna de mercúrio)

mca (metros de coluna de água)

cmca (centímetros de coluna de água)

A determinação da pressão em unidades de pressão propriamente ditas é feita lembrando que  $p = \gamma h$ . Assim, por exemplo, 5 mca correspondem a  $5 \text{ m} \times 10.000 \text{ N}/\text{m}^3 = 50.000 \text{ N}/\text{m}^2$  (onde  $10.000 \text{ N}/\text{m}^3$  é o peso específico da água).

Ainda, por exemplo, 20 mmHg correspondem a  $0,02 \text{ m} \times 136.000 \text{ N}/\text{m}^3 = 2.720 \text{ N}/\text{m}^2$  (onde  $136.000 \text{ N}/\text{m}^3$  é o peso específico do mercúrio).

Vice-versa, a pressão de  $2.720 \text{ N}/\text{m}^2$  corresponde a  $\frac{2.720}{10.000} = 0,272 \text{ mca}$ .

Assim, na prática, a representação da pressão em unidade de coluna de fluido é bastante cômoda, pois permite visualizar imediatamente a possibilidade que tem uma certa pressão de elevar um fluido a uma certa altura.

c) Unidades definidas.

Entre elas, destaca-se a unidade atmosfera (atm), que, por definição, é a pressão que poderia elevar de 760 mm uma coluna de mercúrio. Logo,  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 101.230 \text{ Pa} = 101,23 \text{ kPa} = 10.330 \text{ kgf/m}^2 = 1,033 \text{ kgf/cm}^2 = 1,01 \text{ bar} = 14,7 \text{ psi} = 10,33 \text{ mca}$ .

### EXEMPLO

Determinar o valor da pressão de 340 mmHg em psi e  $\text{kgf/cm}^2$  na escala efetiva e em Pa e atm na escala absoluta. ( $p_{\text{atm}} = 101,2 \text{ kPa}$ )

1) 
$$\begin{array}{l} 760 \text{ mmHg} \\ 340 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 1,033 \text{ kgf/cm}^2 \\ x \end{array}$$

$$x = \frac{1,033 \times 340}{760} = 0,461 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

2) 
$$\begin{array}{l} 760 \text{ mmHg} \\ 340 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 14,7 \text{ psi} \\ y \end{array}$$

$$y = \frac{340 \times 14,7}{760} = 6,6 \text{ psi}$$

3) Para determinar a pressão na escala absoluta, basta lembrar que:

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{ef}} + p_{\text{atm}}$$

$$\begin{array}{l} 760 \text{ mmHg} \\ 340 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 101.230 \text{ Pa} \\ z \end{array}$$

$$z = \frac{340 \times 101.230}{760} = 45.287 \text{ Pa} = 45,3 \text{ kPa}$$

Logo,  $p_{\text{abs}} = 45,3 + 101,2 = 146,5 \text{ kPa}$  (abs)

4) 
$$\begin{array}{l} 760 \text{ mmHg} \\ 340 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 1 \text{ atm} \\ u \end{array}$$

$$u = \frac{340 \times 1}{760} = 0,447 \text{ atm}$$

Logo,  $p_{\text{abs}} = 0,447 + 1 = 1,447 \text{ atm}$  (abs)

## 2.8 O barômetro

A pressão atmosférica é medida pelo barômetro. Se um tubo cheio de líquido, fechado na extremidade inferior e aberto na superior, for virado dentro de uma vasilha do mesmo líquido, ele descerá até uma certa posição e nela permanecerá em equilíbrio (Figura 2.11).

Desprezando a pressão de vapor do líquido, na parte superior obtém-se, praticamente, o vácuo perfeito ou pressão zero absoluto.

Já foi visto que a pressão num mesmo nível é a mesma, logo:  $p_0 = p_A = p_{\text{atm}}$ .

Dessa forma, a coluna  $h$  formada é devida à pressão atmosférica e tem-se  $p_{\text{atm}} = \gamma h$ .

O líquido utilizado é, geralmente, o mercúrio, já que seu peso específico é suficientemente elevado de maneira a formar um pequeno  $h$  e, portanto, pode ser usado um tubo de vidro relativamente curto. Como a pressão atmosférica padrão é muito utilizada, é interessante tê-la em mente:

$$p_{\text{atm}} = 760 \text{ mmHg} = 10.330 \text{ kgf/m}^2 = 101,3 \text{ kPa}$$

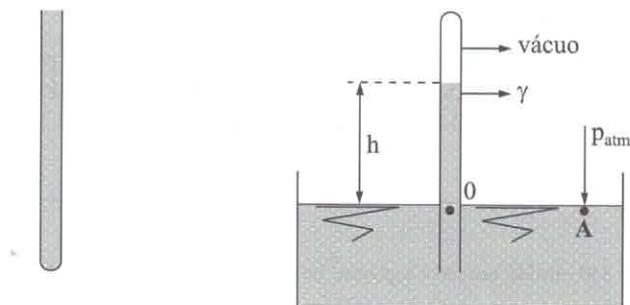


Figura 2.11

## 2.9 Medidores de pressão

### 2.9.1 Manômetro metálico ou de Bourdon

Pressões ou depressões são comumente medidas pelo manômetro metálico (Figura 2.12). Esse nome provém do fato de que a pressão é medida pela deformação do tubo metálico indicado na figura. Ao ligar o manômetro pela tomada de pressão, o tubo fica internamente submetido a uma pressão  $p$  que o deforma, havendo um deslocamento de sua extremidade que, ligada ao ponteiro por um sistema de alavancas, relacionará sua deformação com a pressão do reservatório.

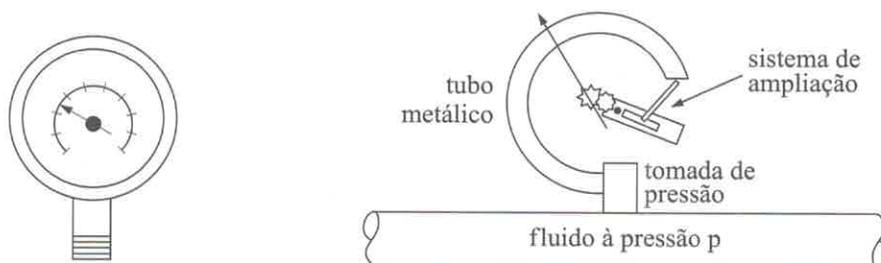


Figura 2.12

A leitura da pressão na escala efetiva será feita diretamente no mostrador, quando a parte externa do manômetro estiver exposta à pressão atmosférica.

Suponha-se, agora, o caso da Figura 2.13.

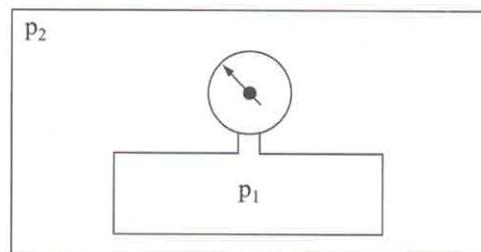


Figura 2.13

Nesse caso, a parte interna do tubo metálico está sujeita à pressão  $p_1$ , e a externa, à  $p_2$ . Dessa forma, o manômetro indicará não a pressão  $p_1$ , mas a diferença  $p_1 - p_2$ . Logo,

$$P_{\text{manômetro}} = P_{\text{tomada de pressão}} - P_{\text{externa}} \quad (2.6)$$

### 2.9.2 Coluna piezométrica ou piezômetro

Consiste num simples tubo de vidro que, ligado ao reservatório, permite medir diretamente a carga de pressão (Figura 2.14).

Logo, dado o peso específico do fluido, pode-se determinar a pressão diretamente.

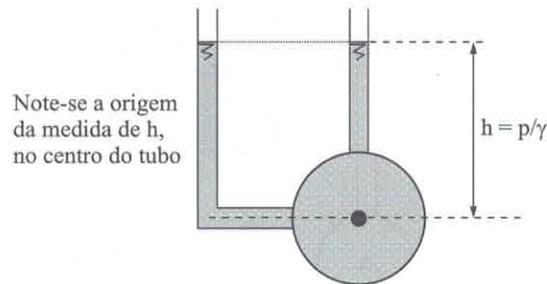


Figura 2.14

O piezômetro apresenta três defeitos que o tornam de uso limitado:

- a) A altura  $h$ , para pressões elevadas e para líquidos de baixo peso específico, será muito alta.

Exemplo: água com pressão de  $10^5 \text{ N/m}^2$  e cujo peso específico é  $10^4 \text{ N/m}^3$  formará uma coluna

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{10^5}{10^4} = 10\text{m}$$

Logo, não sendo viável a instalação de um tubo de vidro com mais de 10 m de altura, o piezômetro não pode, nesse caso, ser útil. Nota-se então que esse aparelho só serve para pequenas pressões.

- b) Não se pode medir pressão de gases, pois eles escapam sem formar a coluna  $h$ .  
 c) Não se pode medir pressões efetivas negativas, pois nesse caso haverá entrada de ar para o reservatório, em vez de haver a formação da coluna  $h$ .

### 2.9.3 Manômetro com tubo em U

A Figura 2.15 mostra um manômetro de tubo em U. Nesse manômetro corrige-se o problema das pressões efetivas negativas. Se isso ocorrer, a coluna de fluido do lado direito ficará abaixo do nível A-A. A Figura 2.15b mostra o mesmo manômetro com a inclusão de um fluido manométrico que, em geral, é mercúrio. A presença do fluido manométrico permite a medida da pressão de gases, já que impede que estes escapem.

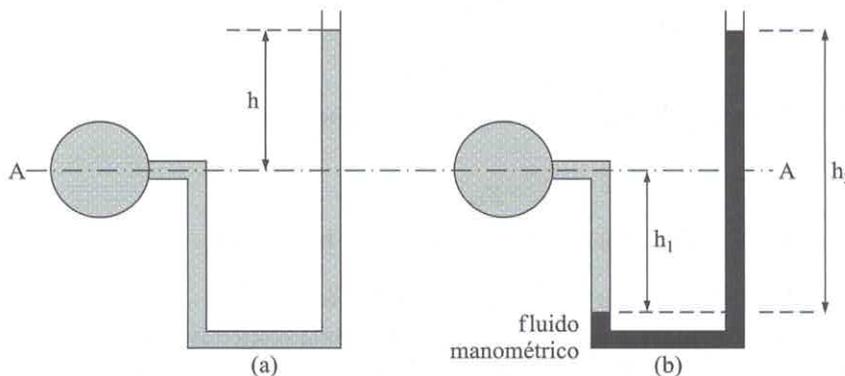


Figura 2.15

Ao mesmo tempo, utilizando um fluido manométrico de elevado peso específico, diminui-se a altura da coluna que se formaria com um líquido qualquer.

Os manômetros de tubo em U, ligados a dois reservatórios, em vez de ter um dos ramos aberto à atmosfera, chamam-se manômetros diferenciais (Figura 2.16).

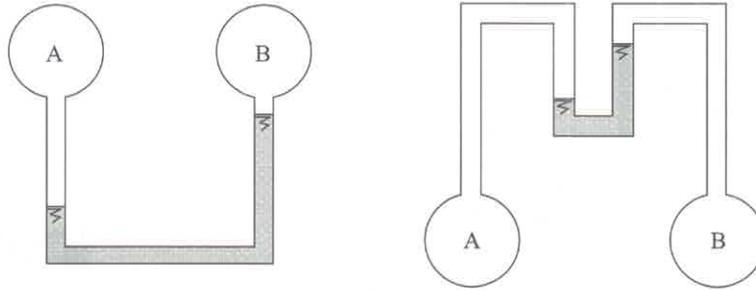


Figura 2.16

### 2.9.4 A equação manométrica

É a expressão que permite, por meio de um manômetro, determinar a pressão de um reservatório ou a diferença de pressão entre dois reservatórios.

Seja o manômetro da Figura 2.17. Pode-se calcular a pressão no fundo dos dois ramos. Pelo Teorema de Stevin, e lembrando que, segundo Pascal, a pressão se transmite integralmente a todos os pontos do fluido, tem-se:

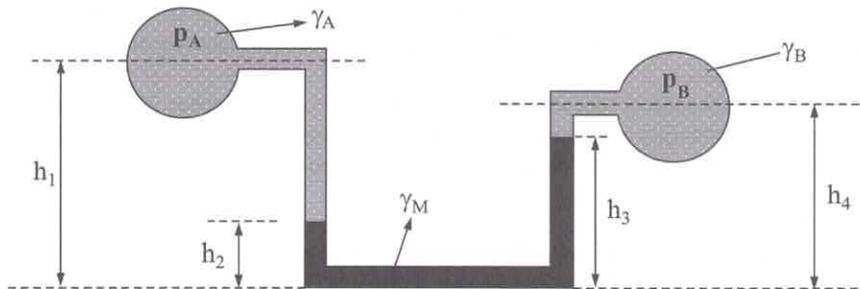


Figura 2.17

pressão no fundo do ramo esquerdo:

$$P_{fe} = p_A + \gamma_A (h_1 - h_2) + \gamma_M h_2 \quad (1)$$

pressão no fundo do ramo direito:

$$P_{fd} = p_B + \gamma_B (h_4 - h_3) + \gamma_M h_3 \quad (2)$$

Como o fluido está em equilíbrio, então a pressão no mesmo nível deve ser a mesma. Logo,

$$P_{fe} = P_{fd}$$

Portanto,  $p_A + \gamma_A (h_1 - h_2) + \gamma_M h_2 = p_B + \gamma_B (h_4 - h_3) + \gamma_M h_3$

ou  $p_B = p_A + \gamma_A (h_1 - h_2) - \gamma_B (h_4 - h_3) - \gamma_M (h_3 - h_2)$

Nota-se que cada peso específico aparece multiplicado pela respectiva altura da coluna, sem necessidade de adotar como referência o fundo. Baseada nessa observação, será mostrada uma regra prática e de fácil aplicação.

**Regra**

Começando do lado esquerdo, soma-se à pressão  $p_A$  a pressão das colunas descendentes e subtrai-se aquela das colunas ascendentes. Note-se que as cotas são sempre dadas até a superfície de separação de dois fluidos do manômetro. Tem-se, portanto:

$$p_A + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 + \gamma_4 h_4 - \gamma_5 h_5 - \gamma_6 h_6 = p_B$$

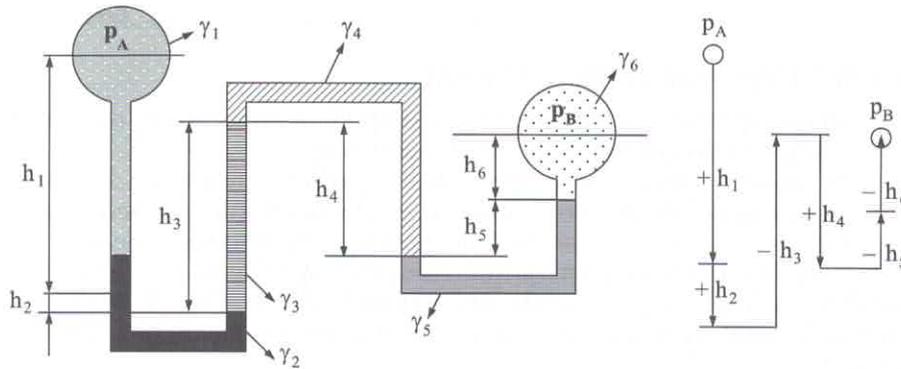
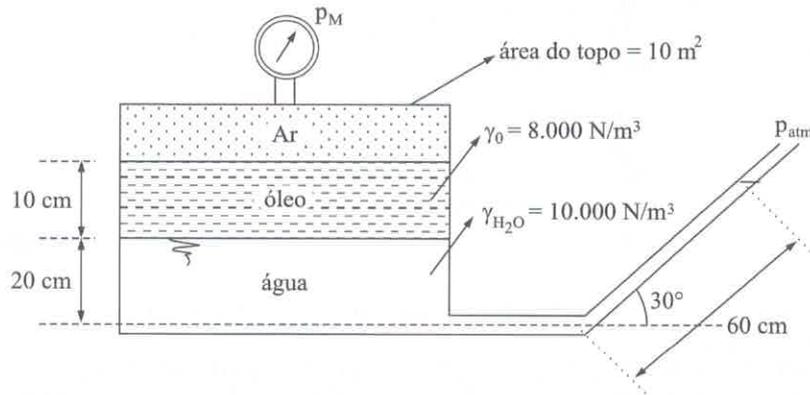


Figura 2.18

**EXEMPLO**

Dado o esquema da figura:

- 1) Qual é a leitura no manômetro metálico?
- 2) Qual é a força que age sobre o topo do reservatório?



Solução

- 1) Determinação de  $p_M$

Usando a equação manométrica, lembrando que o  $\gamma$  dos gases é pequeno e que, portanto, pode-se desprezar o efeito da coluna de ar em face de outros efeitos; lembrando, ainda, que ao trabalhar na escala efetiva  $p_{atm} = 0$  tem-se:

$$p_M + \gamma_0 h_0 + \gamma_{H_2O} h_{H_2O} - \gamma_{H_2O} L \text{ sen } 30^\circ = 0$$

$L \text{ sen } 30^\circ$  é o desnível da coluna de água no ramo direito, pois, pelo teorema de Stevin, a pressão independe da distância, dependendo somente da diferença de cotas.

Logo:

$$P_M = \rho_{H_2O}(L \sin 30^\circ - h_{H_2O}) - \rho_0 h_0$$

$$P_M = 10.000 (0,6 \times 0,5 - 0,2) - 8.000 \times 0,1$$

$$P_M = 200 \text{ N/m}^2$$

2) Pela definição de pressão

$$F_{\text{topo}} = P_M A = 200 \times 10 = 2.000 \text{ N}$$

## 2.10 Força numa superfície plana submersa

Se um fluido está em repouso, pela sua definição, não podem existir forças tangenciais agindo nele: todas as forças serão normais à superfície submersa.

Se a pressão tiver uma distribuição uniforme sobre a superfície, a força será determinada multiplicando-se a pressão pela área correspondente, e o ponto de aplicação será o centro de gravidade da superfície. No caso dos gases, mesmo quando a superfície é vertical, a variação de pressão nessa direção é muito pequena, já que o seu peso específico  $\rho$  é; logo, qualquer que seja a posição da superfície, a força exercida será o produto da pressão pela área.

No caso dos líquidos, a distribuição de pressão será uniforme somente se a superfície submersa for horizontal.

Seja o traço AB do plano perpendicular ao plano da Figura 2.19. A pressão efetiva varia desde zero na superfície livre, até  $BC = p = \gamma h$  no fim da superfície plana.

A variação da pressão desde o topo até o fundo do plano deverá ser linear, pois sabe-se pelo teorema de Stevin que a pressão é diretamente proporcional à profundidade, sendo o coeficiente de proporcionalidade o peso específico do fluido.

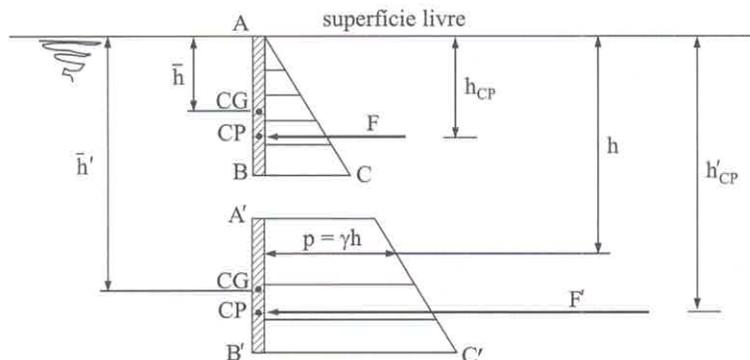


Figura 2.19

Como a pressão varia de ponto para ponto, é óbvio que nesse caso não é possível obter a força pela expressão  $pA$ .

A força resultante de um lado da superfície plana será, portanto, a somatória dos produtos das áreas elementares pela pressão nelas agente. O ponto de aplicação da força resultante irá se localizar abaixo do CG, isto é, deslocado para o lado das maiores pressões. É claro que, quanto mais se afunda a superfície AB (como para a posição A'B'), mais o ponto de aplicação da força resultante aproxima-se do CG, já que as pressões vão se tornando mais uniformes. O ponto de aplicação da força resultante chama-se centro das pressões (CP).

O cálculo do módulo da força resultante das pressões se baseará na Figura 2.20.

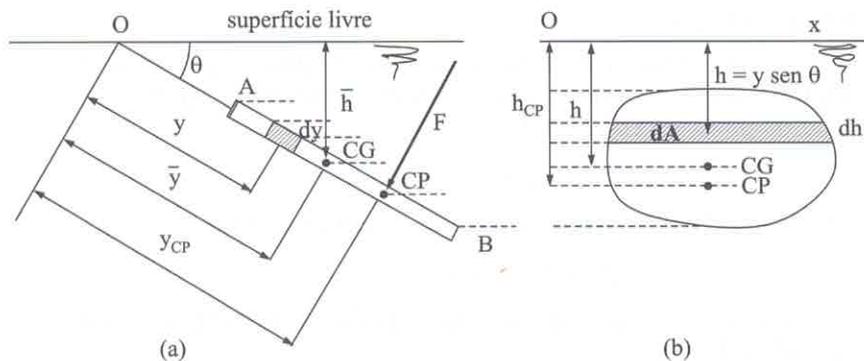


Figura 2.20

Todas as propriedades referentes ao centro de gravidade serão indicadas por um traço e todas as referentes ao centro de pressões, pelo índice CP.

Seja AB o traço do plano em estudo, no plano do papel, formando um ângulo  $\theta$  com a superfície livre.

Deseja-se determinar nesse plano a força resultante das pressões.

Seja, na figura (b), a projeção da superfície em estudo sobre um plano vertical.

Seja  $h$  uma profundidade genérica e  $y$  a correspondente distância até a superfície livre no plano da superfície. Seja  $Ox$  a intersecção da superfície plana AB com a superfície livre do fluido.

Seja o elemento de área  $dA$ , no qual a pressão é constante, pois é horizontal. Tem-se:

$$dA = xdy; \quad p = \gamma h \quad \text{e} \quad h = y \text{ sen } \theta$$

No elemento  $dA$ , a força será:

$$dF = pdA = \gamma h dA = \gamma y \text{ sen } \theta dA$$

Integrando, tem-se:

$$F = \gamma \text{ sen } \theta \int y dA$$

Por definição do centro de gravidade, tem-se:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int y dA$$

Logo:

$$\int y dA = \bar{y} A$$

Substituindo:

$$F = \gamma \text{ sen } \theta \bar{y} A$$

Logo:

$$F = \gamma \bar{h} A = \bar{p} A \tag{2.7}$$

Dessa forma, verifica-se que a força resultante é obtida pelo produto da pressão, no centro de gravidade da superfície, por sua própria área.

Note-se que a resultante independe do ângulo formado pela superfície, desde que o CG se mantenha fixo.

## 2.11 Centro das pressões

*Centro das pressões é o ponto de aplicação da força resultante das pressões sobre uma certa área.*

O eixo Ox da Figura 2.20 será adotado para o cálculo do momento das forças.

A força elementar na placa será dada por:

$$pdA = \gamma y \text{ sen } \theta \, dA = dF$$

O momento será dado pelo produto da força pela distância ao eixo:

$$y \, dF = \gamma y^2 \text{ sen } \theta \, dA \quad (2.8)$$

Se a resultante das forças de pressão for  $F$  e a distância do ponto de aplicação ao eixo Ox for  $y_{CP}$ , tem-se, integrando a Equação 2.8:

$$y_{CP} F = \gamma \text{ sen } \theta \int y^2 \, dA = \gamma \text{ sen } \theta I_o \quad (2.9)$$

onde  $I_o = \int y^2 \, dA$  é o chamado momento de inércia da área  $A$  em relação ao eixo Ox.

Dividindo-se a Equação 2.9 pela Equação 2.7, tem-se:

$$y_{CP} = \frac{\gamma \text{ sen } \theta I_o}{\gamma \text{ sen } \theta \bar{y} A} = \frac{I_o}{\bar{y} A} \quad (2.10)$$

isto é, a distância do centro das pressões ao eixo intersecção da superfície imersa com a superfície livre do fluido é obtida dividindo-se o momento de inércia da área  $A$ , em relação ao mesmo eixo, pelo produto da distância do centro de gravidade pela área da superfície imersa. Uma das propriedades do momento de inércia é:

$$I_o = I_{CG} + \bar{y}^2 A$$

onde  $I_{CG}$  é o momento de inércia calculado em relação a um eixo que passa pelo centro de gravidade da superfície de área  $A$ . Logo, a Equação 2.10 pode ser escrita:

$$y_{CP} = \bar{y} + \frac{I_{CG}}{\bar{y} A} \quad (2.11)$$

Dessa expressão, conclui-se imediatamente que o centro das pressões localiza-se abaixo do centro de gravidade e que, ao aumentar a profundidade, os dois pontos se aproximam.

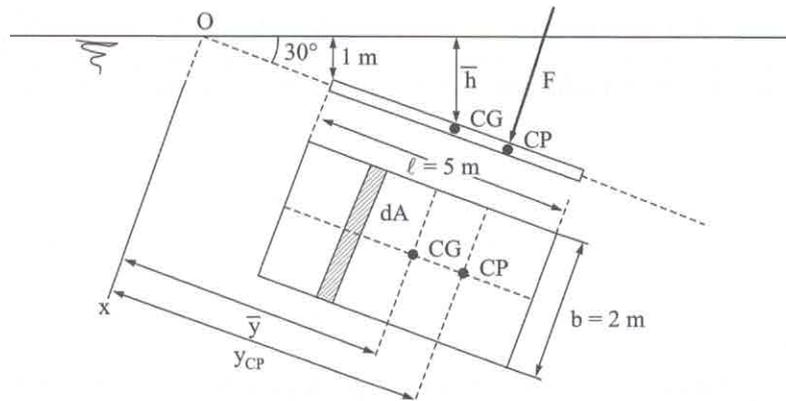
A posição do centro das pressões em relação a um eixo  $y$  será dada pela expressão:

$$x_{CP} F = \int x p \, dA$$

Para figuras simétricas, o centro das pressões estará sempre localizado sobre o eixo da simetria, se este for perpendicular ao eixo Ox.

### EXEMPLO

Na placa retangular da figura, de largura 2 m, determinar a força devida à água numa de suas faces e seu ponto de aplicação ( $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ ).



A pressão no centro de gravidade, devida ao líquido, será:

$$\bar{p} = \bar{h}\gamma = (1 + 2,5 \text{ sen } 30^\circ) 10.000 = 22.500 \text{ N / m}^2$$

portanto:

$$F = \bar{p}A = 22.500 \times 5 \times 2 = 225.000 \text{ N}$$

$$y_{CP} - \bar{y} = \frac{I_{CG}}{\bar{y}A}$$

$$I_{CG} = \int y^2 dA \text{ em relação a um eixo passando pelo CG. Pela figura, } dA = bdy, I_{CG} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} y^2 bdy = \frac{b\ell^3}{12}$$

Essa expressão, referindo-se a um eixo que passa pelo CG, é a mesma para qualquer retângulo que tenha um dos lados paralelos ao eixo Ox.

$$y_{CP} - \bar{y} = \frac{b\ell^3}{\bar{y}A}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{sen } 30^\circ} + \frac{\ell}{2} = 2 + 2,5 = 4,5 \text{ m}$$

$$A = b \times \ell = 2 \times 5 = 10 \text{ m}^2$$

$$\frac{b\ell^3}{12} = \frac{2 \times 5^3}{12} \cong 20,8 \text{ m}^4$$

$$y_{CP} - \bar{y} = \frac{20,8}{4,5 \times 10} = 0,46 \text{ m} \quad \text{ou} \quad y_{CP} = 0,46 + 4,5 = 4,96 \text{ m}$$

A esta altura cabe uma observação. Note-se que a força calculada é somente devida ao líquido em que a superfície está submersa. Normalmente, deveria se considerar também a pressão acima da superfície livre do líquido, que poderia ser ou não a pressão atmosférica. Nesse caso, a pressão  $\bar{p}$  seria dada por:

$$\bar{p} = p_0 + \gamma\bar{h}$$

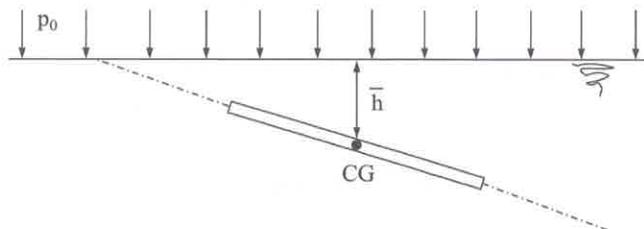


Figura 2.21

Nos exercícios, em geral, a pressão  $p_0$  age em ambos os lados da placa, não precisando ser levada em consideração. Num caso geral, pode-se levar em conta a pressão  $p_0$ , utilizando todas as mesmas expressões deduzidas, substituindo-a por um acréscimo do líquido em estudo igual à sua carga de pressão. A altura do líquido, em vez de ser  $h$ , passará a ser

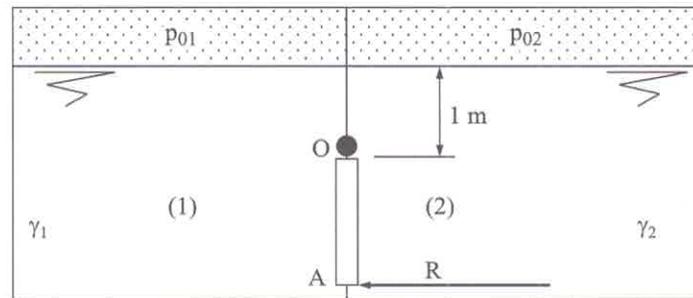
$$h' = h + \frac{p_0}{\gamma}$$

### EXEMPLO

Determinar a força  $R$  que deverá ser aplicada no ponto  $A$  da comporta da figura para que permaneça em equilíbrio, sabendo-se que ela pode girar em torno do ponto  $O$ .

Dados:  $p_{01} = 100 \text{ kPa}$   $\gamma_1 = 10.000 \text{ N/m}^3$   
 $p_{02} = 50 \text{ kPa}$   $\gamma_2 = 8.000 \text{ N/m}^3$

Comporta retangular com  $h = 5 \text{ m}$  e  $b = 2 \text{ m}$ .



### Solução

O problema deve ser reduzido a um outro em que a pressão efetiva, no nível dos dois líquidos, seja nula. Para tanto, substitua-se  $p_{01}$  e  $p_{02}$  por cargas de pressão correspondentes aos dois líquidos do problema.

$$h_{01} = \frac{p_{01}}{\gamma_1} = \frac{100 \times 10^3}{10.000} = 10 \text{ m}$$

$$h_{02} = \frac{p_{02}}{\gamma_2} = \frac{50 \times 10^3}{8.000} = 6,25 \text{ m}$$

Note-se que  $h_{01}$  e  $h_{02}$  são as alturas fictícias dos líquidos que causariam, em seus níveis reais, respectivamente, as pressões  $p_{01}$  e  $p_{02}$ .

Pressão no CG do lado (1):

$$\bar{p}_1 = \gamma_1 \bar{h}_1 = 10.000 (10 + 1 + 2,5) = 135.000 \text{ N / m}^2$$

Força resultante do lado (1):

$$F_1 = \bar{p}_1 A_1 = 135.000 \times 5 \times 2 = 1.350.000 \text{ N} = 1.350 \text{ kN}$$

Centro das pressões do lado (1):

$$y_{CP1} - \bar{y}_1 = \frac{I_{CG}}{\bar{y}_1 A} = \frac{bh^3/12}{\bar{h}_1 \times bh} = \frac{h^2}{12\bar{h}_1}$$

$$h_{CP1} - \bar{h}_1 = \frac{5^2}{12 \times 13,5} = 0,15 \text{ m}$$

Distância do  $CP_1$  ao ponto O:

$$b_1 = 2,5 + 0,15 = 2,65 \text{ m}$$

Pressão no CG do lado (2):

$$\bar{p}_2 = \gamma_2 \bar{h}_2 = 8.000 (6,25 + 1 + 2,5) = 78.000 \text{ N/m}^2$$

Força resultante do lado (2):

$$F_2 = \bar{p}_2 A_2 = 78.000 \times 5 \times 2 = 780.000 \text{ N}$$

CP do lado (2):

$$y_{CP2} - \bar{y}_2 = \frac{I_{CG}}{\bar{y}_2 A} = \frac{bh^3/12}{h_2 \times bh} = \frac{h^2}{12h_2}$$

$$h_{CP2} - \bar{h}_2 = \frac{5^2}{12 \times 9,75} = 0,21 \text{ m}$$

Distância do  $CP_2$  ao ponto O:

$$b_2 = 2,5 + 0,21 = 2,71 \text{ m}$$

Para que a comporta permaneça em equilíbrio, sem girar em torno do ponto O, é necessário que a somatória dos momentos, em relação a esse ponto, seja nula:

$$R \cdot h + F_2 b_2 = F_1 b_1$$

$$R = \frac{F_1 b_1 - F_2 b_2}{h} = \frac{1.350.000 \times 2,65 - 780.000 \times 2,71}{5}$$

$$R = 293.000 \text{ N}$$

## 2.12 Força em superfícies reversas, submersas

Em qualquer superfície reversa, as forças nos diversos elementos de área são diferentes em módulo e direção, de forma que é impossível obter uma somatória delas.

A Equação 2.7 é, portanto, aplicável somente a superfícies planas. No entanto, para qualquer superfície reversa, pode-se determinar a força resultante em certas direções, como a horizontal e a vertical. A resultante dessas duas componentes somente poderá ser determinada se ambas estiverem num mesmo plano.

### 2.12.1 Componente horizontal

Na Figura 2.22a, observa-se uma superfície AB qualquer, projetada sobre um plano vertical, originando a superfície plana A'B'.

Tem-se, então, entre a superfície AB e sua projeção A'B', um volume em equilíbrio estático.

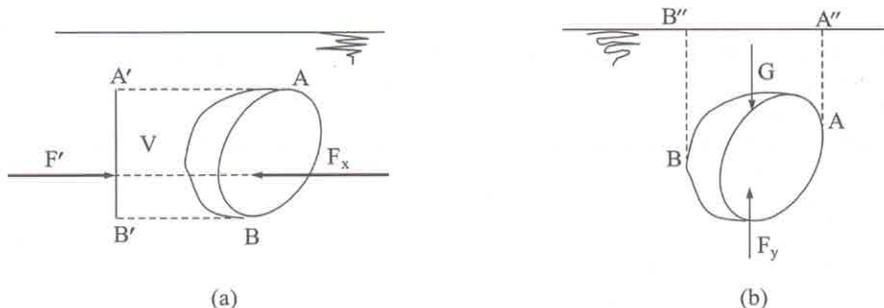


Figura 2.22

As únicas forças horizontais que agem nesse volume são  $F'$  e  $F_x$ .

$$F_x = F'$$

Logo, a componente horizontal que age em qualquer superfície é igual à força horizontal que age numa superfície plana, projeção daquela sobre um plano vertical. Por razões de equilíbrio, a direção deve ser a mesma. Como já se aprendeu a determinar módulo e ponto de aplicação em superfícies planas, a solução em relação a  $A'B'$  resolve o problema da superfície genérica  $AB$ .

### 2.12.2 Componente vertical

A componente vertical pode ser obtida considerando o volume contido entre uma superfície qualquer  $AB$  e sua projeção no plano da superfície livre do líquido (Figura 2.22b). Esse volume está em equilíbrio estático. Se a pressão na superfície for atmosférica, as únicas forças verticais serão o peso  $G$  do volume e  $F_y$  devido à pressão na superfície  $AB$ . Logo:

$$F_y = G$$

Como essas são as únicas forças verticais agentes, por razões de equilíbrio  $F_y$  e  $G$  devem ter a mesma direção. Como o peso tem de passar pelo  $CG$  do volume, então  $F_y$  será vertical e sua direção passará por aquele ponto. A força vertical exercida por um gás é igual ao produto da pressão pela projeção dessa superfície sobre uma superfície horizontal.

No caso de a superfície não conter líquido acima dela, a noção não se altera. A força vertical será igual ao peso do volume de líquido imaginário contido entre a superfície e o nível da superfície livre.

## 2.13 Empuxo

Tudo o que foi dito neste item poderia ter sido concluído no item 2.12. No entanto, optou-se por apresentá-lo em um novo item para dar maior destaque ao estudo do empuxo, que é de grande utilidade.

No item 2.12.2, verificou-se que a componente vertical que age numa superfície submersa é igual ao peso do volume de fluido, real ou fictício, contido acima da superfície.

Considere-se, então, o corpo  $ABCD$  da Figura 2.23.

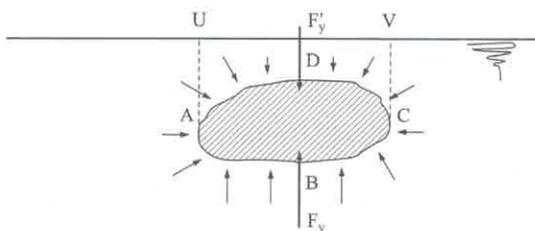


Figura 2.23

Esse corpo pode ser imaginado como formado por duas superfícies: uma superfície  $ABC$ , em que todas as forças de pressão possuem uma componente vertical de sentido para cima, e outra superfície  $ADC$ , em que todas as forças de pressão possuem uma componente vertical de sentido para baixo.

A resultante das componentes na superfície  $ABC$ , pelo que foi dito anteriormente, será dada por:

$$F_y = \gamma V_{UABCV}$$

Na superfície  $ADC$ , tem-se:

$$F'_y = \gamma V_{UADCV}$$

O saldo  $F_y - F'_y$  será uma força vertical para cima, indicada por E e chamada empuxo.

$$E = F_y - F'_y = \gamma(V_{UABCV} - V_{UADCV})$$

ou

$$E = \gamma V_{ABCD} = \gamma V \quad (2.12)$$

onde: E = empuxo

V = volume de fluido deslocado pelo corpo

$\gamma$  = peso específico do fluido

A Equação 2.12 pode ser expressa em palavras pelo princípio de Arquimedes: "Num corpo total ou parcialmente imerso num fluido, age uma força vertical de baixo para cima, chamada empuxo, cuja intensidade é igual ao peso do volume de fluido deslocado".

Pela noção de empuxo, é fácil estabelecer a condição de flutuação de um corpo (Figura 2.24).

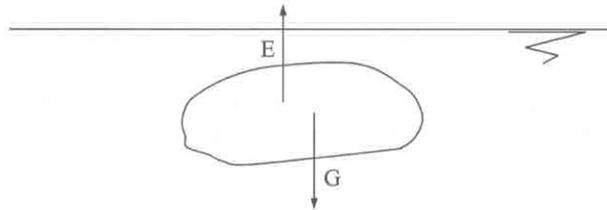


Figura 2.24

Suponha-se um corpo totalmente submerso. Ele flutuará se seu peso G for menor que o empuxo.

$$E \geq G$$

No caso da igualdade, o corpo estará em equilíbrio em qualquer posição. Imaginando o corpo totalmente submerso:

$$V_{\text{corpo}} = V_{\text{deslocado}}$$

Logo:

$$\gamma_{\text{fluido}} V_{\text{deslocado}} \geq \gamma_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}}$$

O corpo flutuará se:

$$\gamma_{\text{fluido}} \geq \gamma_{\text{corpo}} \quad (2.13)$$

## 2.14 Flutuador — Nomenclatura

Corpo flutuante ou flutuador é qualquer corpo que permanece em equilíbrio quando está parcial ou totalmente imerso num líquido.

Plano de flutuação é o plano horizontal da superfície livre do fluido.

Linha de flutuação é a intersecção do plano de flutuação com a superfície do flutuador.

Seção de flutuação é a seção plana cujo contorno é a linha de flutuação.

Volume de carena é o volume de fluido deslocado pela parte imersa do flutuador.

Note-se que o peso do volume de carena é igual à intensidade do empuxo.

Centro de carena é o ponto de aplicação do empuxo. Se o fluido for homogêneo, o centro de carena coincidirá com o centro de gravidade do volume de carena (Figura 2.25).

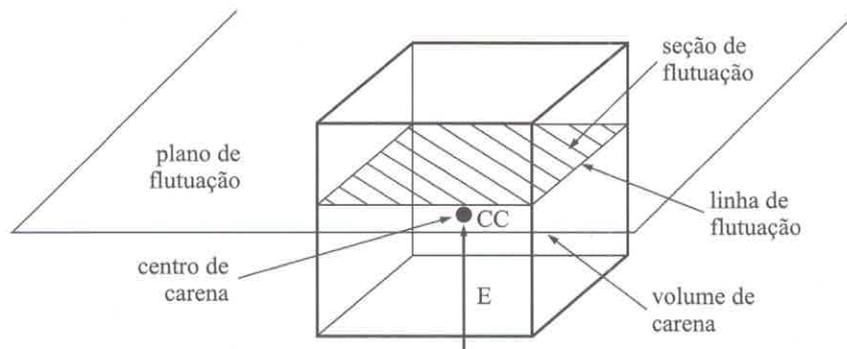


Figura 2.25

## 2.15 Estabilidade

As forças que agem num corpo total ou parcialmente submerso em repouso são o seu peso ( $G$ ), cujo ponto de aplicação é o centro de gravidade do corpo, e o empuxo ( $E$ ), cujo ponto de aplicação é o centro de carena.

Torna-se evidente que, para que um flutuador esteja em equilíbrio, é necessário que essas duas forças tenham a mesma intensidade, a mesma direção e sentidos opostos. Resta analisar a estabilidade desse equilíbrio.

Suponha-se um corpo em equilíbrio. Aplique-se uma força pequena nesse corpo. É evidente que, se ele estava em equilíbrio, a aplicação dessa força isolada fará com que se desloque em relação à posição inicial. Retirando essa força, aplicada durante um intervalo de tempo muito pequeno, podem acontecer três coisas:

- o corpo retorna à posição de equilíbrio inicial: diz-se que o equilíbrio é estável;
- o corpo, mesmo retirando a força, afasta-se cada vez mais da posição inicial: diz-se que o equilíbrio é instável;
- o corpo permanece na nova posição, sem retornar, mas sem se afastar mais da posição inicial: diz-se que o equilíbrio é indiferente.

A análise da estabilidade no caso de flutuadores reduz-se à estabilidade vertical e de rotação, já que para deslocamentos horizontais o equilíbrio é indiferente.

## 2.16 Estabilidade vertical

### 2.16.1 Corpo totalmente submerso em equilíbrio

Se o corpo estiver totalmente submerso em equilíbrio, o volume deslocado será sempre o mesmo. Qualquer que seja o deslocamento, sempre existirá o equilíbrio, de forma que é um caso de equilíbrio indiferente.

### 2.16.2 Corpo parcialmente submerso em equilíbrio

Nesse caso, ao deslocar o corpo para baixo, o volume de carena e o empuxo aumentam, ficando numa situação em que  $E > G$ . Ao retirar a força que causou o deslocamento, o flutuador sobe até que haja uma diminuição no volume de carena para que novamente  $E = G$ . Se o corpo for deslocado para cima, o volume de carena diminuirá, de forma que  $E < G$ . Ao retirar a força aplicada, o corpo desce até que  $E = G$  novamente, e isso acontece na posição inicial.

Note-se que, em relação a deslocamentos verticais, os flutuadores têm um equilíbrio estável.

## 2.17 Estabilidade à rotação

Suponha-se um flutuador obrigado a abandonar a sua posição de equilíbrio, por uma pequena força que o faça girar de um pequeno ângulo em torno de um eixo de rotação. Nessa situação, devem ser examinados dois casos para os quais o comportamento é diferente.

### 2.17.1 Corpo totalmente submerso em equilíbrio

Suponha-se um corpo totalmente submerso em equilíbrio, cujo centro de gravidade esteja abaixo do centro de carena (Figura 2.26).

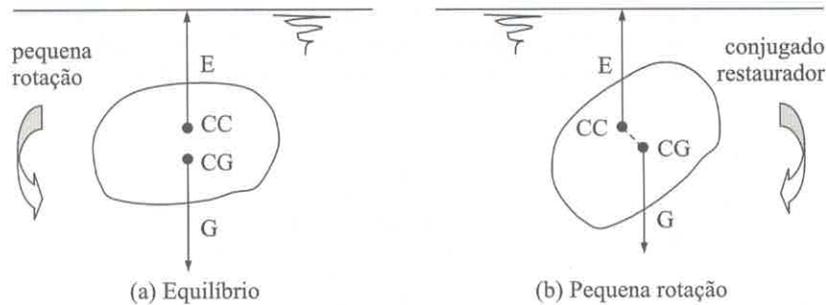


Figura 2.26

Se o corpo girar de um pequeno ângulo, o CG e o CC permanecerão fixos em relação a ele, de forma que o empuxo e o peso, de módulos constantes e sempre verticais, vão se encontrar na posição indicada em (b).

Dessa forma, fica criado um conjugado que tende a girar o corpo no sentido contrário ao da rotação. É evidente que o corpo tenderá novamente à posição (a), que será, portanto, de equilíbrio estável.

Se o CG estiver acima do CC (Figura 2.27), o conjugado criado pelo empuxo e pelo peso tenderá a girar mais o corpo, de forma que ele se afastará ainda mais da posição de equilíbrio inicial. Nesse caso, a posição (a) da Figura 2.27 será de equilíbrio instável.

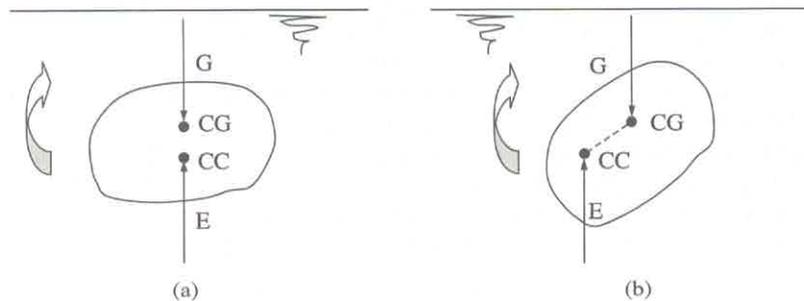


Figura 2.27

Observa-se que num corpo totalmente submerso em equilíbrio, para que haja estabilidade à rotação, o centro de gravidade deverá estar abaixo do centro de carena.

Num corpo homogêneo em equilíbrio totalmente submerso num fluido homogêneo, o centro de gravidade do corpo coincide com o centro de gravidade do volume de carena; logo, coincide com o centro de carena.

Dessa forma, o CC e o CG coincidem e o corpo estará sempre numa situação de equilíbrio indiferente.

### 2.17.2 Corpo parcialmente submerso em equilíbrio

Nesse caso, o estudo não é tão simples como no caso dos corpos totalmente submersos. É óbvio que o centro de gravidade abaixo do centro de carena é uma garantia para que o equilíbrio seja estável; entretanto, essa condição não é necessária.

Às vezes, a rotação do corpo causa uma variação no formato do volume de carena (o que não acontecia com o corpo totalmente submerso), o que cria um deslocamento no centro de carena, em relação ao corpo, tal que o equilíbrio pode ser estável mesmo que este esteja abaixo do centro de gravidade.

Pela Figura 2.28, nota-se que se o corpo estivesse totalmente submerso, o volume deslocado seria constante, de forma que o CC acompanharia o movimento do corpo, mantendo-se fixo em relação a ele. Isso, como já foi visto, causaria o aparecimento de um conjugado a favor da rotação, que provocaria o afastamento indefinido da posição de equilíbrio.

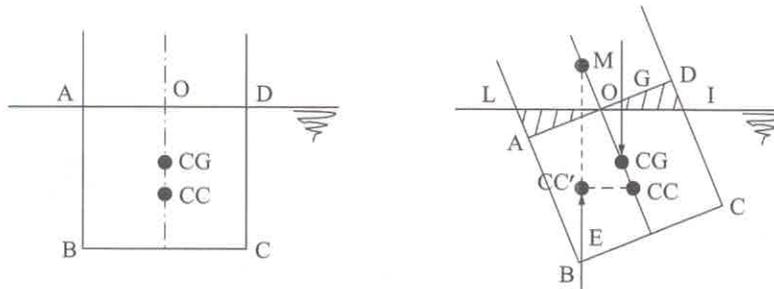


Figura 2.28

Estando o corpo parcialmente submerso, com a rotação em torno do eixo O, o volume de carena, que era ABCD, passa a ser LICB, com conseqüente deslocamento do centro de carena para a esquerda em CC'.

Fica assim mostrado, intuitivamente, que o flutuador terá condições de retornar à posição inicial, estando, portanto, em equilíbrio estável desde que o empuxo esteja à esquerda do peso, como na Figura 2.28.

Note-se que o sentido do conjugado pode ser analisado pela posição do ponto M, chamado metacentro, que é a intersecção do eixo de simetria do flutuador com a direção do empuxo.

Se o ponto M estiver acima do CG, o conjugado será contrário à rotação e o equilíbrio, estável.

Se o ponto M estiver abaixo do CG, o conjugado será a favor da rotação e o equilíbrio, instável.

Se o ponto M estiver em CG, o equilíbrio será indiferente.

Note-se que quanto mais acima estiver o metacentro em relação ao CG, maior será o conjugado que contraria a rotação e, portanto, mais estável o equilíbrio. Por essa observação, conclui-se que é importante conhecer a distância do metacentro ao centro de gravidade. Tal distância, chamada altura metacêntrica, será indicada por  $r$  (Figura 2.29).

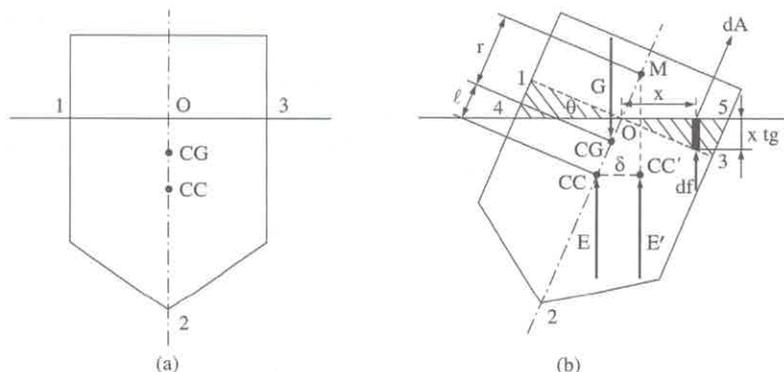


Figura 2.29

Para efeito da determinação de  $r$ , considere-se o perfil da Figura 2.29a, tendo girado de um ângulo  $\theta$  pequeno em torno do eixo de rotação  $O$ . Note-se que o volume de carena alterou-se de  $V_{123}$  para  $V_{425}$ , fazendo com que o CC se desloque para  $CC'$ . No entanto,  $E = E'$ , já que o volume, apesar de mudar de forma, é o mesmo.

O momento de  $E'$  em relação ao ponto  $CC$  deverá ser igual ao momento dos elementos de volume de  $V_{425}$  em relação ao mesmo ponto.

Entretanto, nota-se que  $V_{402}$  é simétrico ao  $V_{302'}$ , de forma que o momento em relação a  $CC$  será nulo.

Então:  $E\delta = \text{Momento do } V_{305}$   
 $E\delta = \int xdf$

Mas  $df = dV\gamma = dAx \text{ tg } \theta\gamma$   
 onde  $dA$  é um elemento de área horizontal, da seção de flutuação.

$$E\delta = \int \gamma x^2 \text{tg } \theta dA = \gamma \text{tg } \theta \int x^2 dA$$

Mas  $\int x^2 dA = I_y$  é o momento de inércia da área da seção de flutuação em relação ao eixo  $y$  (Figura 2.30).

Logo:  $E\delta = \gamma \text{tg } \theta I_y$

Note-se que:  $E = \gamma V$  e  $\text{tg } \theta = \frac{\delta}{(r + \ell) \cos \theta}$

Logo:  $\gamma V \delta = \gamma \frac{\delta}{(r + \ell) \cos \theta} I_y$  ou  $r + \ell = \frac{I_y}{V \cos \theta}$

Se o ângulo  $\theta$  for pequeno, como se admitiu,

$$r = \frac{I_y}{V} - \ell \tag{2.14}$$

Como no caso do equilíbrio

$$G = E = \gamma V \quad \text{então} \quad V = \frac{G}{\gamma}$$

Logo:  $r = \frac{\gamma I_y}{G} - \ell \tag{2.15}$

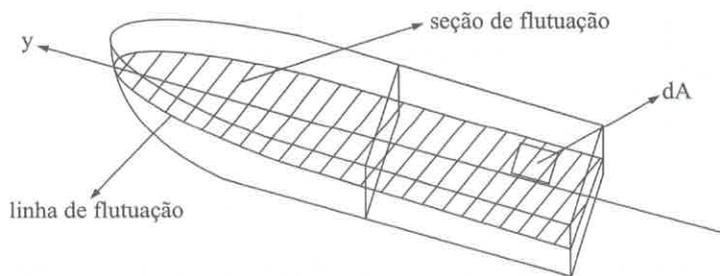
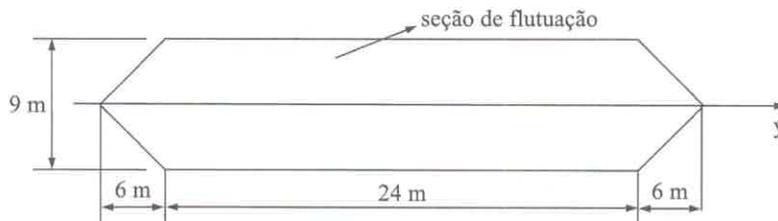


Figura 2.30

Como já foi visto, deve-se ter  $r > 0$  e, quanto maior, maior será a estabilidade. Logo, a estabilidade do flutuador será aumentada diminuindo  $\ell$  e, portanto, abaixando o centro de gravidade ou aumentando  $\gamma I_y / G$ , isto é, aumentando o momento de inércia da seção de flutuação.

## EXEMPLOS

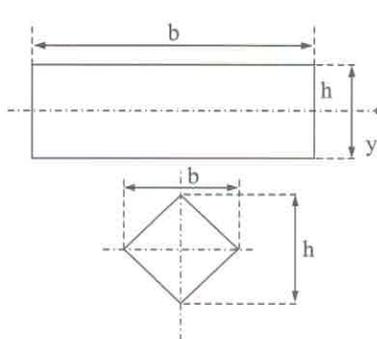
1. Um navio desloca  $9,45 \times 10^6$  N e tem uma seção de flutuação como a indicada na figura. O centro de carena está a 1,8 m abaixo da superfície de flutuação e o centro de gravidade, a 0,3 m. Determinar a altura metacêntrica em relação a uma inclinação em torno do eixo  $y$ .



Solução

Pela Equação 2.15, 
$$r = \frac{\mathcal{I}_y}{G} - \ell$$

Tem-se 
$$\ell = 1,8 - 0,3 = 1,5 \text{ m}$$



$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{24 \times 9^3}{12} = 1.458 \text{ m}^4$$

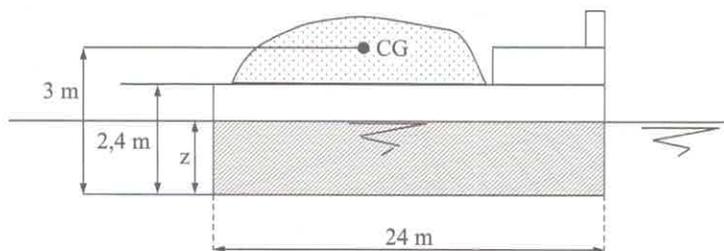
$$I_{y_2} = \frac{bh^3}{48} = \frac{12 \times 9^3}{48} = 182 \text{ m}^4$$

$$I_y = 1.458 + 182 = 1.640 \text{ m}^4$$

$$\text{Logo: } r = \frac{10.000 \times 1.640}{9,45 \times 10^6} - 1,5$$

$$r = 0,24 \text{ m} > 0$$

2. Uma balsa tem o formato de um paralelepípedo com 9 m de largura, 24 m de comprimento e 2,4 m de altura. A balsa pesa  $4,72 \times 10^6$  N quando carregada e o seu centro de gravidade está a 3 m acima do fundo. Determinar a altura metacêntrica.



Solução

É preciso determinar a distância  $\ell$  entre o centro de gravidade e o centro de carena. Para isso, deve-se determinar a altura  $z$ , pois  $\ell = 3 - z/2$ .

Sabe-se que:  $E = \gamma V = G$

$$V = \frac{G}{\gamma} = \frac{4,72 \times 10^6}{10^4} = 472 \text{ m}^3$$

$$z = \frac{472}{24 \times 9} = 2,18 \text{ m}$$

Logo:  $\ell = 3 - 1,09 \cong 1,9 \text{ m}$

Tem-se:  $r = \frac{\bar{y}_y}{G} - \ell = \frac{I_y}{V} - \ell$

$$I_y = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{24 \times 9^3}{12} = 1.458 \text{ m}^4$$

Portanto:  $r = \frac{1.458}{472} - 1,9 = 1,2 \text{ m}$

## 2.18 Equilíbrio relativo — Introdução

Suponha-se um fluido contido num recipiente que se move com translação uniformemente variada (acelerada ou retardada) (Figura 2.31).

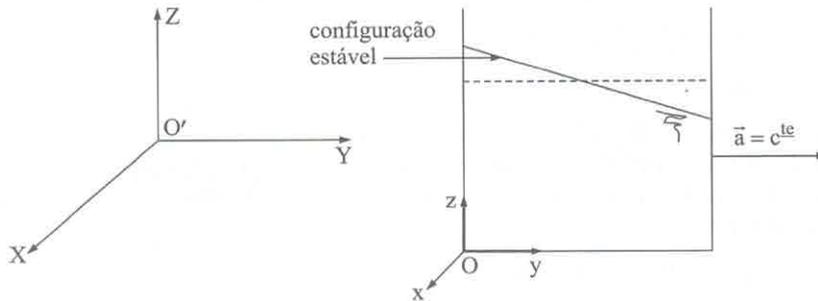


Figura 2.31

Em relação ao sistema de referência fixo  $O'XYZ$ , o fluido estará em movimento. No entanto, adotando-se o sistema  $Oxyz$  fixo ao recipiente, nota-se que o fluido, após um certo deslocamento inicial, permanecerá em equilíbrio com uma configuração que será estável, desde que a aceleração seja mantida constante.

Como as partículas do fluido não terão movimento em relação ao recipiente, fica excluída a presença de tensões de cisalhamento, podendo esse caso ser tratado como um caso de equilíbrio e ser estudado pela estática dos fluidos.

Como o fluido só estará em repouso em relação ao sistema de eixos  $Oxyz$  que se movem em relação a  $O'XYZ$ , esse estudo será chamado equilíbrio relativo.

Note-se que, para que isso aconteça, é suficiente que a aceleração seja constante, incluindo-se nesse estudo também o movimento circular e uniforme, em que a aceleração tangencial é nula e a centrípeta mantém-se constante.

## 2.19 Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado segundo a horizontal

Sejam o recipiente da Figura 2.32 e o fluido nele contido em equilíbrio em relação ao sistema de referência fixo no recipiente.

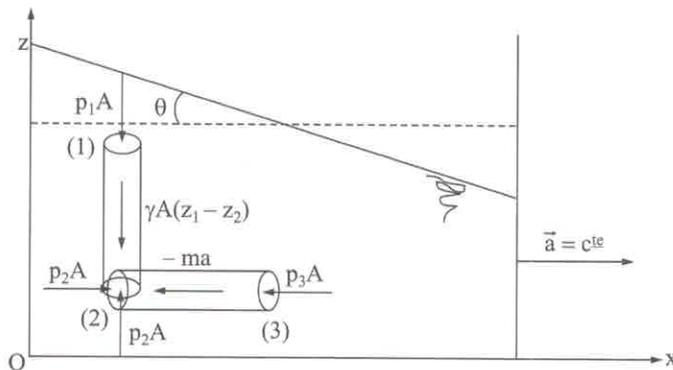


Figura 2.32

Opera-se da mesma forma que no item 2.2 (teorema de Stevin), lembrando apenas que agora haverá uma variação de pressão dependente da distância entre os dois pontos, e não somente da diferença de cotas. Adotemos os pontos genéricos (1), (2), (3):

$$\text{Na vertical:} \quad p_2 A - p_1 A - \gamma A (z_1 - z_2) = 0 \quad (\text{Equilíbrio})$$

$$\text{Logo:} \quad p_2 - p_1 = \gamma (z_1 - z_2)$$

$$\text{ou} \quad p_2 - p_1 = \gamma \Delta z_{1,2} \quad (2.16)$$

Logo, na vertical continua válido o teorema de Stevin.

Na horizontal, pelo princípio de D'Alambert, no sistema relativo, por causa do equilíbrio, pode-se substituir o efeito da aceleração pelo efeito de uma força fictícia de inércia dada por  $(-m\vec{a})$ .

Pela condição de equilíbrio:

$$p_2 A - p_3 A - m a_x = 0$$

$$\text{ou} \quad p_2 A - p_3 A - \rho A (x_3 - x_2) a_x = 0$$

$$\text{Logo:} \quad p_2 - p_3 = \rho \Delta x_{3,2} a_x \quad (2.17)$$

A variação de pressão entre dois pontos quaisquer será dada pela soma de uma variação segundo a vertical e uma segundo a horizontal.

Pelas equações 2.16 e 2.17, a variação de pressão entre os pontos (1) e (3) será:

$$p_3 - p_1 = -\rho \Delta x_{3,2} a_x + \gamma \Delta z_{1,2}$$

$$\text{mas} \quad z_2 = z_3 \quad \text{e} \quad x_1 = x_2$$

$$\text{Logo:} \quad p_3 - p_1 = -\rho \Delta x_{3,1} a_x + \gamma \Delta z_{1,3}$$

$$\text{ou} \quad \Delta p_{3,1} = -\rho \Delta x_{3,1} a_x - \gamma \Delta z_{3,1} \quad (2.18)$$

Essa equação permite, dadas as coordenadas de dois pontos quaisquer, determinar a diferença de pressão entre eles.

É interessante, nesse estudo, determinar a inclinação das superfícies em que a pressão se mantém constante (isobáricas). Lembre o leitor que, num fluido não acelerado, tais superfícies eram horizontais.

Se os pontos (3) e (1) da Equação 2.18 pertencem a uma superfície de pressão constante, tem-se:

$$\Delta p = 0 \quad \text{e} \quad -\rho \Delta x_{3,1} a_x + \gamma \Delta z_{3,1} = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\Delta z_{1,3}}{\Delta x_{3,1}} = \frac{\rho a_x}{\gamma}$$

$$\frac{\Delta z_{1,3}}{\Delta x_{3,1}} = \frac{\rho a_x}{g}$$

Note-se que a superfície livre é de pressão constante e que  $\Delta z / \Delta x = \text{tg } \theta$  (Figura 2.33); logo, as superfícies de pressão constante serão paralelas a ela e formarão um ângulo  $\theta$  com a horizontal.

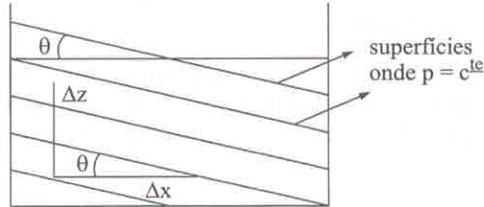


Figura 2.33

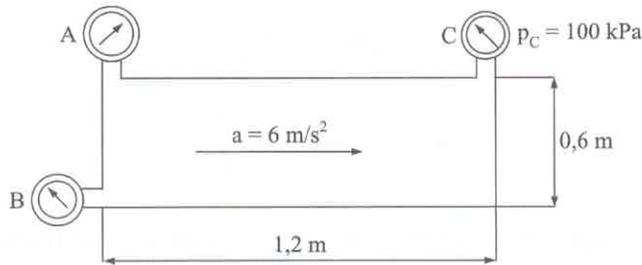
Logo:

$$\text{tg } \theta = \frac{a_x}{g} \tag{2.19}$$

Se o recipiente for fechado, não existirá superfície livre, mas as superfícies de pressão constante continuarão a obedecer à Equação 2.19.

**EXEMPLO**

Um tanque hermeticamente fechado possui uma aceleração de  $6 \text{ m/s}^2$  para a direita. Qual é a pressão nos manômetros A e B indicados na figura? ( $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ) Qual é a inclinação das superfícies de pressão constante?



Solução

Pela Equação 2.18, tem-se  $p_A - p_C = -\rho a_x (x_A - x_C) - \gamma (z_A - z_C)$

Como  $z_A = z_C$ , obtém-se  $p_A - p_C = -\rho a_x (x_C - x_A)$

ou  $p_A = \rho a_x (x_C - x_A) + p_C = 1.000 \times 6 \times 1,2 + 10^5$   
 $p_A = 107,2 \text{ kPa}$

Note-se que A e B estão na mesma vertical; logo,  $x_A = x_B$

$$p_A - p_B = -\gamma (z_A - z_B)$$

ou  $p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B) = 107.200 + 10.000 \times 0,6$   
 $p_B = 113,2 \text{ kPa}$

A inclinação das linhas de pressão constante será dada por

$$\operatorname{tg} \theta = a_x/g = 6/10 = 0,6$$

$$\theta \cong 31^\circ$$

## 2.20 Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado segundo a vertical

Nesse caso, as superfícies a pressão constante mantêm-se horizontais, havendo apenas uma variação na diferença de pressão entre dois pontos, em relação ao caso de repouso. Quando a aceleração é para cima, o efeito da força de inércia irá se somar ao efeito da gravidade; caso contrário, será subtraído.

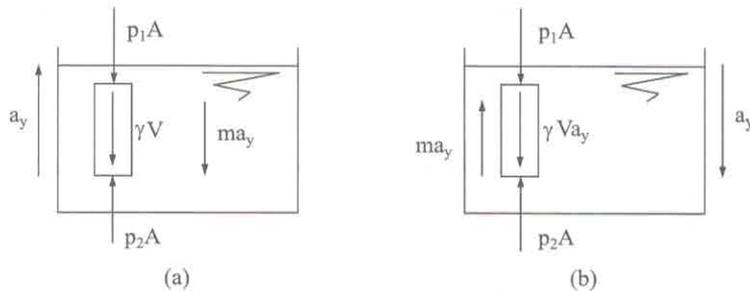


Figura 2.34

Tem-se:  $p_2 A - p_1 A - \gamma A \Delta z_{1,2} \mp \rho A \Delta z_{1,2} a_y = 0$   
onde o sinal negativo corresponde à Figura 2.34a.

$$p_2 - p_1 = \gamma \Delta z_{1,2} \mp \rho a_y \Delta z_{1,2}$$

ou

$$p_2 - p_1 = \gamma \Delta z_{1,2} \left( 1 \pm \frac{a_y}{g} \right) \quad (2.20)$$

$$\Delta p_{2,1} = -\gamma \Delta z_{2,1} \left( 1 \pm \frac{a_y}{g} \right) \quad (2.21)$$

## 2.21 Recipiente com movimento de translação uniformemente acelerado ao longo de um plano inclinado

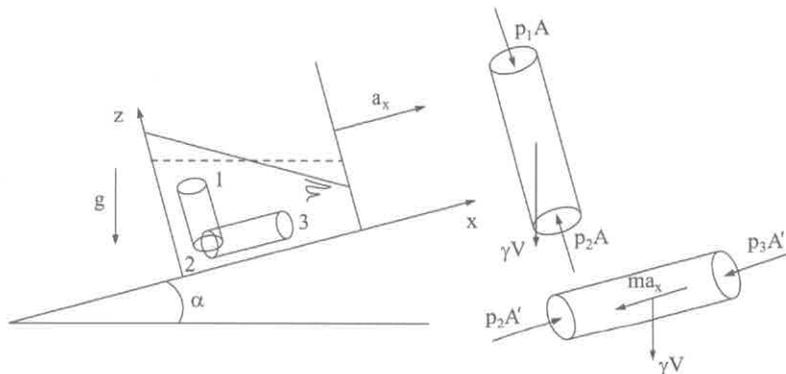


Figura 2.35

Paralelo a z:

$$\begin{aligned}
 p_2 A - p_1 A - \gamma V \cos \alpha &= 0 \\
 p_2 A - p_1 A &= \gamma A \Delta z_{1,2} \cos \alpha \\
 p_2 - p_1 &= \gamma \Delta z_{1,2} \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Paralelo a x, adotando-se um A' tal que, qualquer que seja  $x_3$ , o peso do segundo cilindro seja igual ao do primeiro:

$$\begin{aligned}
 p_2 A' - p_3 A' - m a_x - \gamma V \sin \alpha &= 0 \\
 p_2 A' - p_3 A' &= \rho A' \Delta x_{3,2} a_x + \gamma A' \Delta x_{3,2} \sin \alpha \\
 p_2 - p_3 &= \rho \Delta x_{3,2} a_x + \gamma \Delta x_{3,2} \sin \alpha
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

### Diferença de pressão entre dois pontos quaisquer

Pelas equações 2.22 e 2.23, tem-se:

$$p_3 - p_1 = \gamma \Delta z_{1,2} \cos \alpha - \rho \Delta x_{3,2} a_x - \gamma \Delta x_{3,2} \sin \alpha$$

mas

$$z_2 = z_3 \quad \text{e} \quad x_1 = x_2$$

Logo:

$$p_3 - p_1 = -\gamma \Delta z_{3,1} \cos \alpha - \rho \Delta x_{3,1} a_x - \gamma \Delta x_{3,1} \sin \alpha \tag{2.24}$$

### Planos de pressão constante

Nos pontos desses planos  $\Delta p = 0$ , logo:

$$-\gamma \Delta z_{3,1} \cos \alpha - \rho \Delta x_{3,1} a_x - \gamma \Delta x_{3,1} \sin \alpha = 0$$

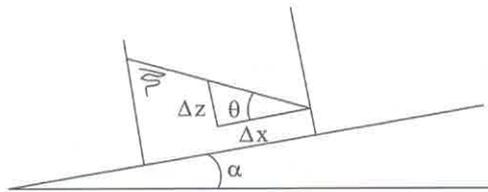


Figura 2.36

Da Figura 2.36, nota-se que  $\text{tg} \theta = \frac{\Delta z}{\Delta x}$

Logo:

$$\text{tg} \theta = \frac{\rho a_x + \gamma \sin \alpha}{\gamma \cos \alpha}$$

ou

$$\text{tg} \theta = \frac{a_x}{g \cos \alpha} + \text{tg} \alpha \tag{2.25}$$

## 2.22 Recipiente com movimento de rotação de velocidade angular $\omega$ constante

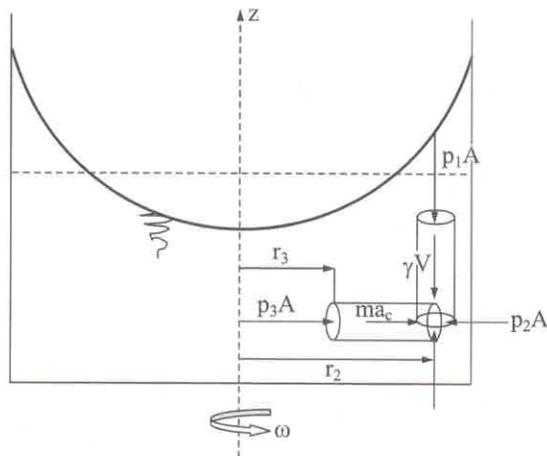


Figura 2.37

Seja um sistema de coordenadas cilíndricas, isto é, um eixo  $z$  coincidente com o de rotação e um eixo  $r$ , normal a  $z$  e com origem em qualquer ponto desse eixo. A coordenada  $r$  determina qualquer ponto de uma circunferência de raio  $r$ .

Note-se que, nesse caso, haverá variações da pressão ao longo da vertical e ao longo do raio  $r$ , já que a aceleração centrípeta é função deste.

Pela Figura 2.37, teremos na vertical:

$$p_2 - p_1 = \gamma \Delta z_{1,2} \quad (2.26)$$

Ao longo de um raio  $r$  qualquer  $p_2 A - p_3 A - m a_c = 0$

Note-se que:

$$m = \rho(r_2 - r_3)A$$

e que a aceleração centrípeta média no cilindro horizontal indicado será dada por:

$$a_c = \omega^2 \frac{(r_3 + r_2)}{2}$$

Logo: 
$$p_2 A - p_3 A = \rho(r_2 - r_3)A \omega^2 \frac{(r_3 + r_2)}{2}$$

ou 
$$p_2 - p_3 = r \frac{(r_2^2 - r_3^2) \omega^2}{2}$$

ou 
$$p_2 - p_3 = \rho \frac{\omega^2}{2} \Delta r_{2,3}^2 \quad (2.27)$$

A variação da pressão entre dois pontos quaisquer será dada por:

$$p_3 - p_1 = -r \frac{\omega^2}{2} \Delta r_{1,3}^2 + \gamma \Delta z_{1,3}$$

ou 
$$p_3 - p_1 = r \frac{\omega^2}{2} \Delta r_{3,1}^2 - \gamma \Delta z_{3,1} \quad (2.28)$$

As superfícies de pressão constante são tais que  $\Delta p = 0$ .

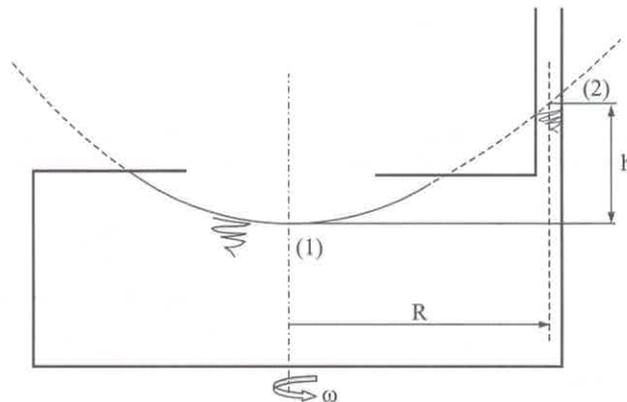
Logo: 
$$\gamma \Delta z = \rho \frac{\omega^2}{2} \Delta r^2$$

ou 
$$\Delta z = \frac{\omega^2}{2g} \Delta r^2 \quad (2.29)$$

A Equação 2.29 é a equação de um parabolóide de revolução; logo, este será também o formato da superfície livre, se existir.

### EXEMPLO

Um tanque de base circular possui um tubo vertical cujo eixo está a uma distância  $R$  do eixo do tanque. Inicialmente encontra-se parado e cheio de água até o nível da tampa. Em seguida, passa a girar em torno de seu eixo com uma rotação  $n = 120$  rpm, e o nível da água no tubo vertical sobe até uma altura  $h$  acima do nível, no centro aberto à atmosfera. Calcular  $h$  no ponto médio do tubo vertical. Dados:  $R = \frac{0,5}{\pi}$  m;  $\rho = 1.000$  kg/m<sup>3</sup>,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>



Solução

Sejam os pontos (1), que é o vértice da parábola na situação de equilíbrio, e (2), que é o ponto mais alto do eixo do tubo vertical.

Esses pontos estarão à mesma pressão ( $p_{atm}$ ). Sendo  $z_1 = 0$  e  $r_1 = 0$ , tem-se como consequência que  $z_2 = h$  e  $r_2 = R$ .

Logo: 
$$p_2 - p_1 = \rho \frac{\omega^2}{2} \Delta r_{2,1}^2 - \gamma \Delta z_{2,1}$$

ou 
$$z_2 - z_1 = \frac{\omega^2}{2g} (r_2^2 - r_1^2)$$

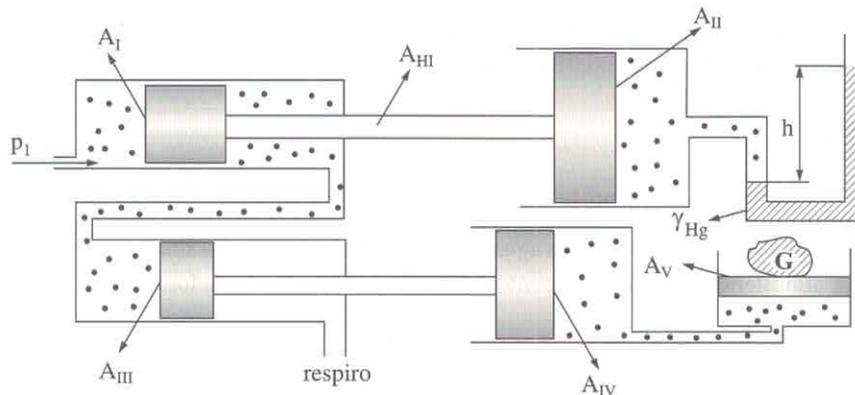
ou 
$$h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Como  $\omega = 2\pi n$ , então 
$$h = \frac{4\pi^2 n^2 R^2}{2g} = \frac{2\pi^2 n^2 R^2}{g}$$

Logo: 
$$h = \frac{2\pi^2 (120/60)^2 (0,5/\pi)^2}{10} = 0,2 \text{ m}$$

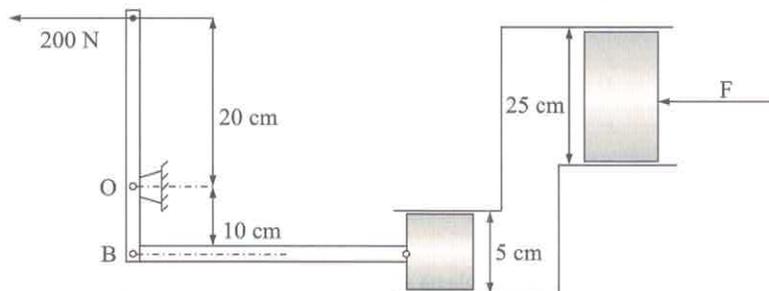
## EXERCÍCIOS

- 2.1 No sistema da figura, desprezando-se o desnível entre os cilindros, determinar o peso  $G$ , que pode ser suportado pelo pistão V. Desprezar os atritos. Dados:  $p_1 = 500 \text{ kPa}$ ;  $A_I = 10 \text{ cm}^2$ ;  $A_{HI} = 2 \text{ cm}^2$ ;  $A_{II} = 2,5 \text{ cm}^2$ ;  $A_{III} = 5 \text{ cm}^2$ ;  $A_{IV} = 20 \text{ cm}^2$ ;  $A_V = 10 \text{ cm}^2$ ;  $h = 2 \text{ m}$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ .



Resp.:  $G = 135 \text{ N}$

- 2.2 Aplica-se uma força de  $200 \text{ N}$  na alavanca  $AB$ , como é mostrado na figura. Qual é a força  $F$  que deve ser exercida sobre a haste do cilindro para que o sistema permaneça em equilíbrio?



Resp.:  $F = 10 \text{ kN}$

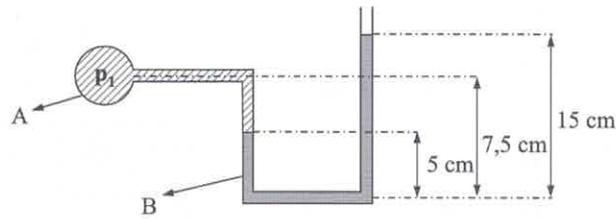
- 2.3 Qual é a altura da coluna de mercúrio ( $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ) que irá produzir na base a mesma pressão de uma coluna de água de  $5 \text{ m}$  de altura? ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000 \text{ N/m}^3$ )

Resp.:  $h_{\text{Hg}} = 368 \text{ mm}$

- 2.4 Determinar a pressão de  $3,5 \text{ atm}$  nas outras unidades de pressão na escala efetiva e, sendo a pressão atmosférica local  $740 \text{ mmHg}$ , determinar a pressão absoluta em todas as unidades de pressão.

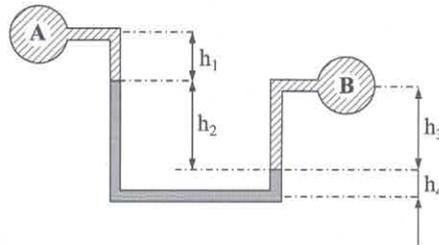
Resp.:  $p_{\text{ef}} = 3,5 \text{ atm} = 0,362 \text{ MPa} = 3,61 \text{ kgf/cm}^2 = 36.200 \text{ kgf/m}^2 = 36,2 \text{ mca} = 2.660 \text{ mmHg}$   
 $p_{\text{abs}} = 4,47 \text{ atm} = 0,47 \text{ MPa} = 4,62 \text{ kgf/cm}^2 = 46.200 \text{ kgf/m}^2 = 46,2 \text{ mca} = 3.397 \text{ mmHg}$

- 2.5 No manômetro da figura, o fluido A é água e o fluido B, mercúrio. Qual é a pressão  $p_1$ ? Dados:  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000 \text{ N/m}^3$ .



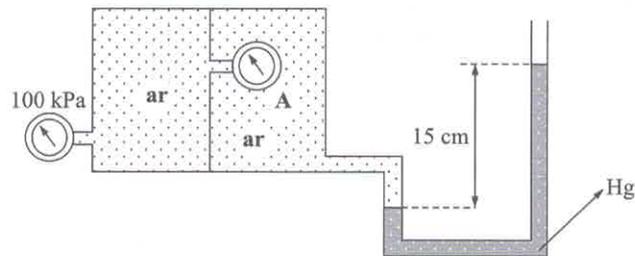
Resp.:  $p_1 = 13,35 \text{ kPa}$

2.6 No manômetro diferencial da figura, o fluido A é água, B é óleo e o fluido manométrico é mercúrio. Sendo  $h_1 = 25 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 100 \text{ cm}$ ,  $h_3 = 80 \text{ cm}$  e  $h_4 = 10 \text{ cm}$ , qual é a diferença de pressão  $p_A - p_B$ ? Dados:  $\gamma_{H_2O} = 10.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{Hg} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{óleo}} = 8.000 \text{ N/m}^3$ .



Resp.:  $p_A - p_B = -132,1 \text{ kPa}$

2.7 Calcular a leitura do manômetro A da figura.  $\gamma_{Hg} = 136.000 \text{ N/m}^3$

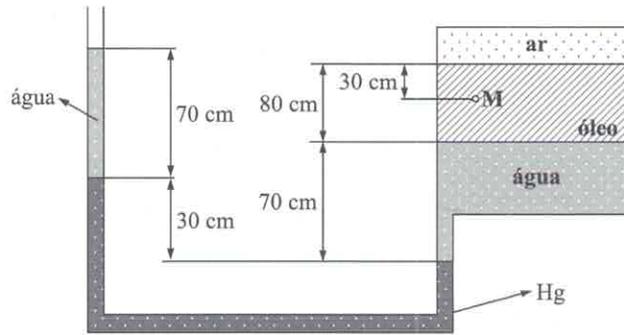


Resp.:  $p_A = 79,6 \text{ kPa}$

2.8 Determinar as pressões efetivas e absolutas:

- 1) do ar;
- 2) no ponto M, na configuração a seguir.

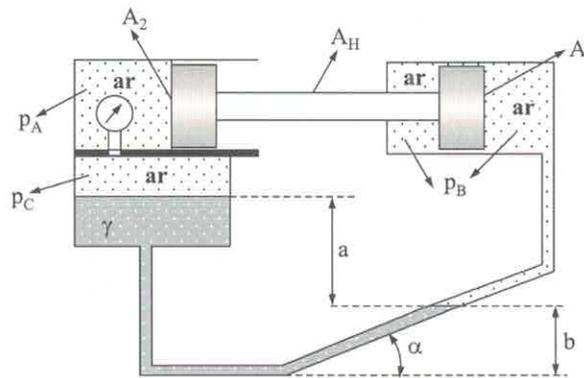
Dados: leitura barométrica  $740 \text{ mmHg}$ ;  $\gamma_{\text{óleo}} = 8.500 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{Hg} = 136.000 \text{ N/m}^3$



- Resp.: 1)  $p_{ar} = 34 \text{ kPa}$ ;  $p_{ar \text{ abs}} = 134 \text{ kPa (abs)}$   
 2)  $p_M = 36,55 \text{ kPa}$ ;  $p_{M \text{ abs}} = 136,55 \text{ kPa (abs)}$

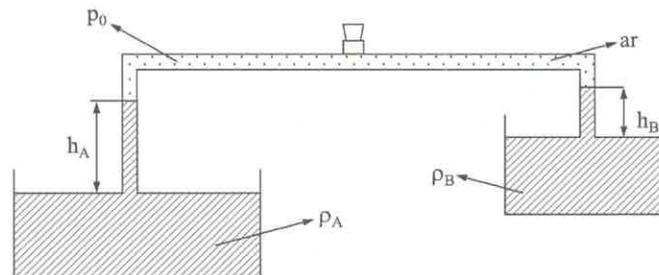
2.9 No dispositivo da figura, a leitura do manômetro é 30 kPa e a relação de áreas dos pistões é  $A_2 / A_1 = 2$ .

A pressão atmosférica no local é 700 mmHg. Estando o sistema em equilíbrio, pede-se a pressão  $p_B$  na escala absoluta em mca. Dados:  $\gamma = 27.000 \text{ N/m}^3$ ;  $a = 100 \text{ cm}$ ;  $b = 80 \text{ cm}$ ;  $\gamma_{Hg} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{H_2O} = 10.000 \text{ N/m}^3$ ;  $A_1 / A_H = 2$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .



- Resp.:  $p_B = 17,12 \text{ mca (abs)}$

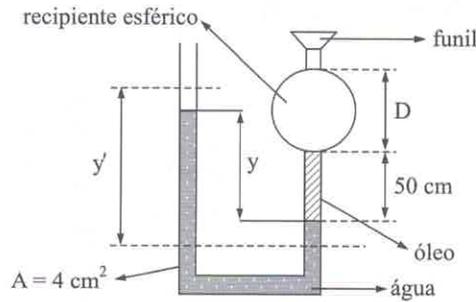
2.10 Determinar  $\rho_A$ ,  $p_0$  e  $p_0 \text{ abs}$  na configuração do desenho, sendo dados:  $h_B = 0,1 \text{ m}$ ;  $h_A = 0,2 \text{ m}$ ;  $\rho_B = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ;  $p_{atm} = 100 \text{ kPa}$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- Resp.:  $\rho_A = 500 \text{ kg/m}^3$ ;  $p_0 = -1.000 \text{ Pa}$ ;  $p_0 \text{ abs} = 99 \text{ kPa (abs)}$ .

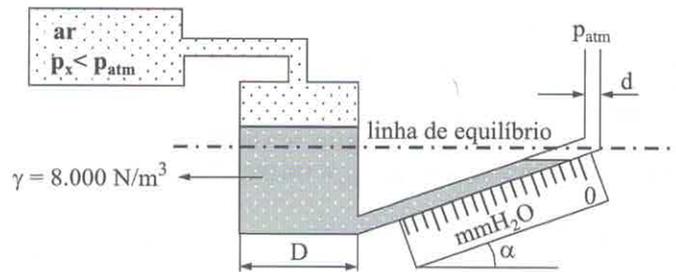
2.11 No sistema da figura, na situação inicial a esfera está vazia. Introdz-se óleo pelo funil até preencher totalmente o recipiente esférico e y passa a valer  $y' = 1 \text{ m}$ . Dados:  $\gamma_{\text{óleo}} = 8.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{H_2O} = 10.000 \text{ N/m}^3$ .

- a) Qual é o valor de  $y$  na situação inicial?
- b) Qual é o diâmetro da esfera?
- c) Qual é o volume de óleo introduzido para estabelecer a situação final?



Resp.:  $y = 0,4 \text{ m}$ ; b)  $D = 0,45 \text{ m}$ ; c)  $V = 47.833 \text{ cm}^3$

- 2.12 No sistema da figura, se a escala fornece  $p_x$  em  $\text{mmH}_2\text{O}$ , qual é o valor real, em mm, de uma divisão da escala? Dados:  $D = 4,5 \text{ d}$ ;  $\alpha = 11,5^\circ$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000 \text{ N/m}^3$ .

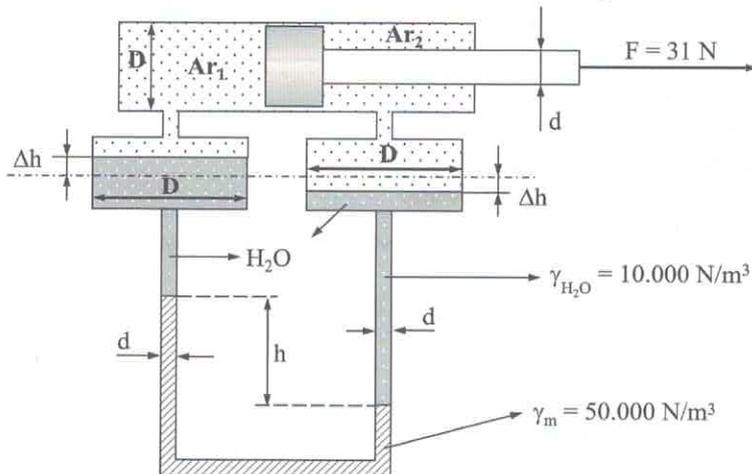


Resp.: 5 mm

- 2.13 Na figura a seguir, o sistema está em equilíbrio estático. Pede-se:

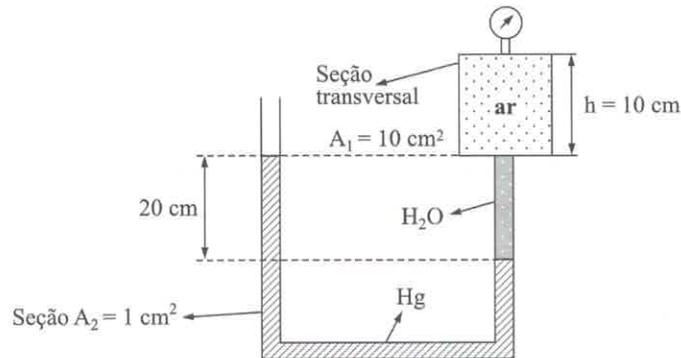
- a)  $p_{ar1}$  em mmHg (abs);
- b)  $p_{ar2}$  em mca.

Dados:  $D = 71,4 \text{ mm}$ ;  $d = 35,7 \text{ mm}$ ;  $h = 400 \text{ mm}$ ;  $p_{atm} = 684 \text{ mmHg}$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ; para  $F = 0 \Rightarrow h = 0$ .



Resp.: a)  $p_{ar1} = 831 \text{ mmHg (abs)}$ ; b)  $p_{ar2} = 3,7 \text{ mca}$

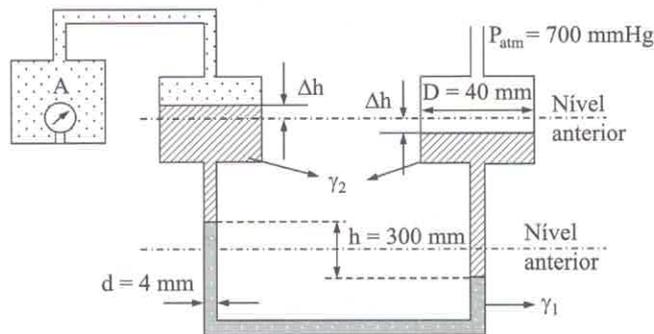
- 2.14 A figura mostra o ar contido num recipiente, inicialmente a  $100^\circ\text{C}$ . O ar é esfriado e a água do manômetro sobe  $0,5\text{ cm}$  para dentro do recipiente. Dados:  $p_{\text{atm}} = 100\text{ kPa}$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000\text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000\text{ N/m}^3$ .
- Qual é a leitura inicial do manômetro? (Pa)
  - Qual é a leitura final do manômetro? (Pa)
  - Qual é a temperatura final do ar? ( $^\circ\text{C}$ )



Resp.: a) 25.200 Pa; b) 12.050 Pa; c)  $44^\circ\text{C}$ .

- 2.15 No manômetro da figura, são indicados os níveis dos fluidos manométricos antes e depois de ele ser ligado ao reservatório A. Pede-se:

- a leitura do manômetro em mca;
  - a densidade do ar do reservatório A em  $\text{kg/m}^3$  se a temperatura dele é  $20^\circ\text{C}$  e  $R = 287\text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ .
- Dados:  $\gamma_1 = 10.000\text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_2 = 8.000\text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000\text{ N/m}^3$ .

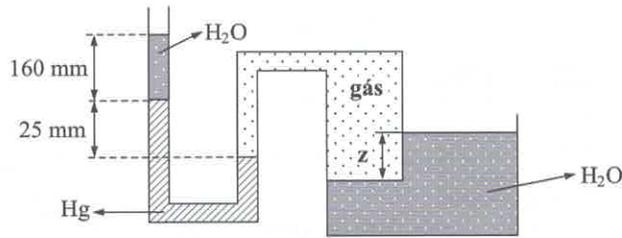


Resp.:  $p_{m_A} = 0,0624\text{ mca}$ ;  $\rho_A = 1,12\text{ kg/m}^3$ .

- 2.16 Para a configuração a seguir, responder:

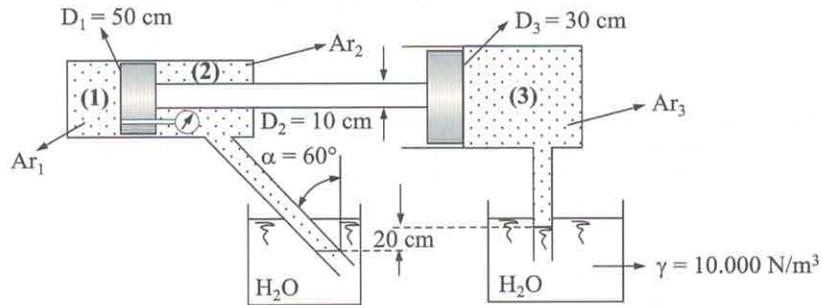
- Qual é a pressão do gás em valor absoluto?
- Qual é o valor da cota  $z$ ?
- Aquece-se o gás de  $20^\circ\text{C}$  para  $60^\circ\text{C}$  e o desnível  $z$  varia para  $1\text{ m}$ . Qual será o novo volume do gás, se o inicial era  $2\text{ m}^3$ ?

Dados:  $p_{\text{atm}} = 662\text{ mmHg}$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000\text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000\text{ N/m}^3$



Resp.: a) 95 kPa (abs); b) 0,5 m; c) 2,16 m<sup>3</sup>

2.17 No esquema dado, qual é a pressão em (1) se o sistema está em equilíbrio estático? (Leitura do manômetro  $p_m = 10$  kPa.)



Resp.:  $p_1 = 43,5$  kPa

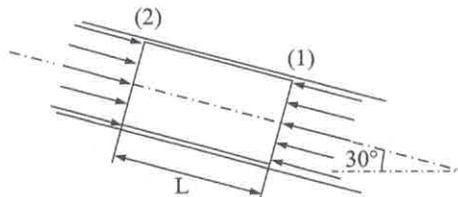
2.18 O cilindro movimenta-se dentro da tubulação circular da figura com velocidade constante. A folga entre o cilindro e a tubulação contém óleo de viscosidade dinâmica  $\mu = 10^{-2}$  Ns/m<sup>2</sup>.

a) O peso sobe ou desce? Justificar.

b) Qual é o comprimento do cilindro?

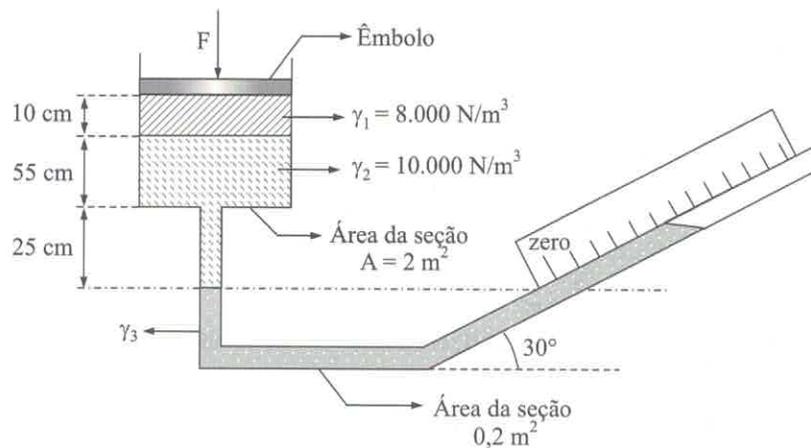
c) Qual é a massa específica do material do cilindro em kg/m<sup>3</sup>?

Dados: peso do cilindro:  $G = 3.950$  N; diâmetro do cilindro:  $D_c = 0,5$  m; diâmetro do tubo:  $D_t = 0,501$  m;  $v = 2$  m/s;  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;  $p_1 = 50$  kPa;  $p_2 = 40$  kPa.



Resp.: a) desce; b) 0,183 m; c) 10.993 kg/m<sup>3</sup>

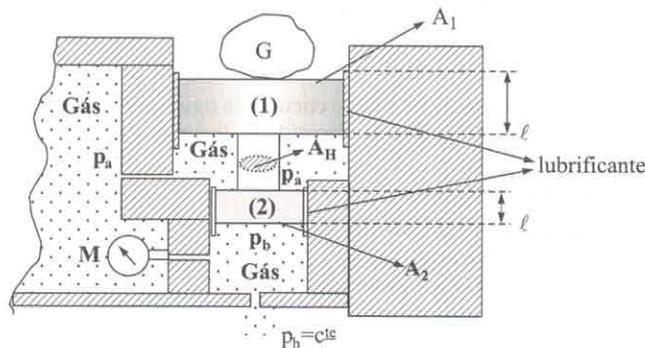
2.19 No manômetro da figura, sabe-se que, quando a força  $F$  é 55,6 kN, a leitura na régua é 100 cm. Determinar o valor da nova leitura, caso a força  $F$  dobre de valor.



Resp.: 128 cm

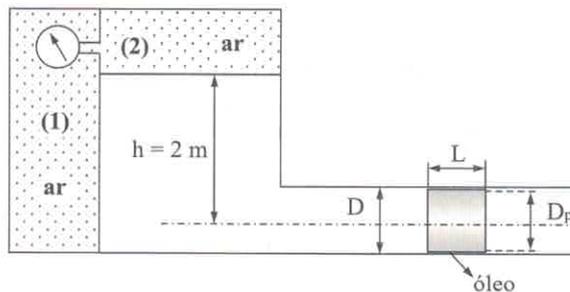
2.20 O pistão da figura desce com velocidade constante de 5 m/s. Dados: espessura da camada lubrificante 0,001 m;  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\gamma = 8.000 \text{ N/m}^3$ ;  $p_a = 10 \text{ kPa}$ ;  $G = 100 \text{ N}$ ;  $D_1 = 16 \text{ cm}$ ;  $D_2 = 8 \text{ cm}$ ;  $A_H = 20 \text{ cm}^2$ ;  $\ell = 5 \text{ cm}$ ;  $p_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ; despreza-se o peso do pistão. Pede-se:

- a) a força resistente oferecida pelo lubrificante ( $F_{\mu}$ );
- b) a pressão absoluta  $p_b$  ( $\text{c}^{\text{te}}$ );
- c) a leitura do manômetro M.



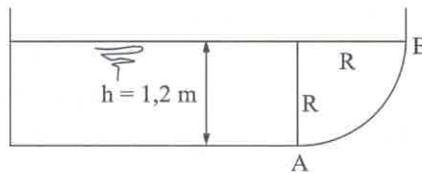
Resp.: a) 150 N; b) 60 kPa (abs); c) -50 kPa.

2.21 Calcular a pressão na câmara (1) sabendo que o pistão se desloca com uma velocidade constante de 1,2 m/s e a indicação do manômetro metálico é 10 kPa. Dados:  $D = 1 \text{ m}$ ;  $L = 0,2 \text{ m}$ ;  $\nu_{\text{óleo}} = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $D_p = 0,998 \text{ m}$ ;  $\gamma_{\text{óleo}} = 8.000 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Observação: considerar o nível do óleo constante.



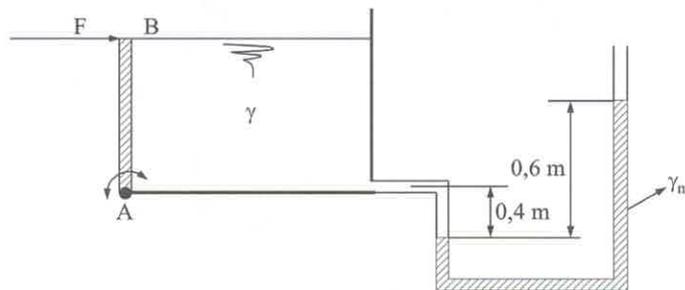
Resp.:  $p_1 = -25,23 \text{ kPa}$

- 2.22 Determinar as componentes horizontal e vertical da força devido à água que age na parte em forma de cilindro AB do tanque da figura, cuja largura é 0,3 m. Dado:  $\gamma_{H_2O} = 10.000 \text{ N/m}^3$ .



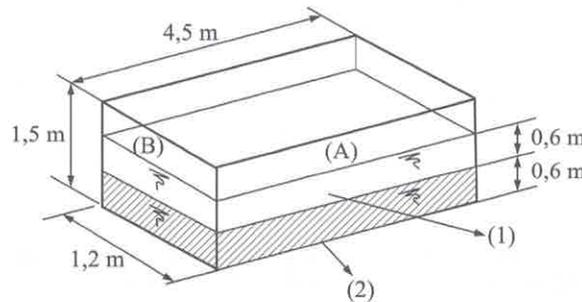
Resp.:  $F_x = 2.160 \text{ N}$ ;  $F_y = 3.393 \text{ N}$ .

- 2.23 Na instalação da figura, a comporta quadrada AB, que pode girar em torno de A, está em equilíbrio devido à ação da força horizontal F. Sabendo que  $\gamma_m = 80.000 \text{ N/m}^3$  e  $\gamma = 30.000 \text{ N/m}^3$ , determinar o valor da força F.



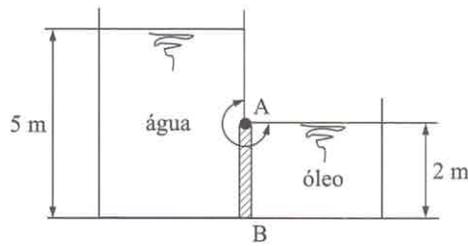
Resp.  $F = 8.640 \text{ N}$

- 2.24 Um tanque retangular, como o da figura, tem 4,5 m de comprimento, 1,2 m de largura e 1,5 m de altura. Contém 0,6 m de água e 0,6 m de óleo. Calcular a força devida aos líquidos nas paredes laterais e no fundo. Dados:  $\gamma_1 = 8.500 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_2 = 10.000 \text{ N/m}^3$ .



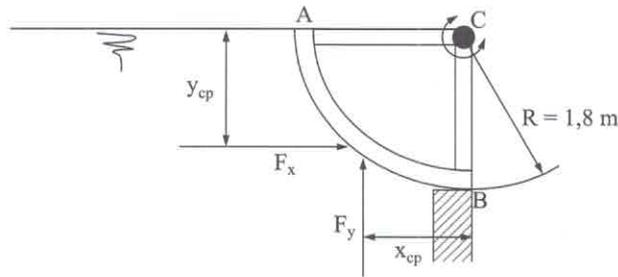
Resp.:  $F_A = 28.755 \text{ N}$ ;  $F_B = 7.668 \text{ N}$ ;  $F_{\text{fundo}} = 59.948 \text{ N}$

- 2.25 A comporta AB da figura tem 1,5 m de largura e pode girar em torno de A. O tanque à esquerda contém água ( $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ ) e o da direita, óleo ( $\gamma = 7.500 \text{ N/m}^3$ ). Qual é a força necessária em B para manter a comporta vertical?



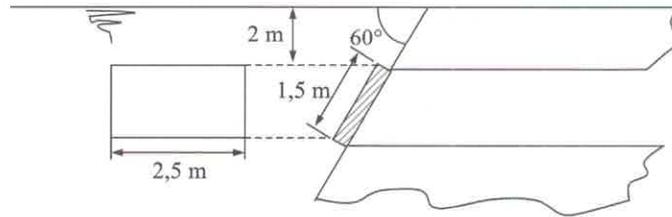
Resp.:  $F_B = 50.000 \text{ N}$

2.26 Determinar o módulo e o ponto de aplicação das componentes horizontal e vertical da força exercida pela água sobre a comporta AB da figura, sabendo que sua largura é 0,3 m, o raio é 1,8 m e a comporta está articulada em C.



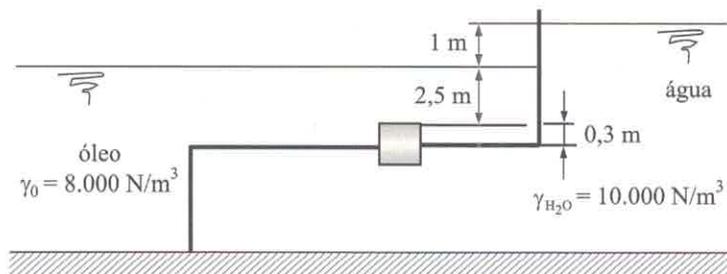
Resp.:  $F_y = 7.634 \text{ N}$ ;  $F_x = 4.860 \text{ N}$ ;  $y_{cp} = 1,2 \text{ m}$ ;  $x_{cp} = 0,736 \text{ m}$

2.27 Determinar a força, devida à pressão da água, na comporta retangular da figura, sendo o peso específico do fluido  $10.000 \text{ N/m}^3$ .



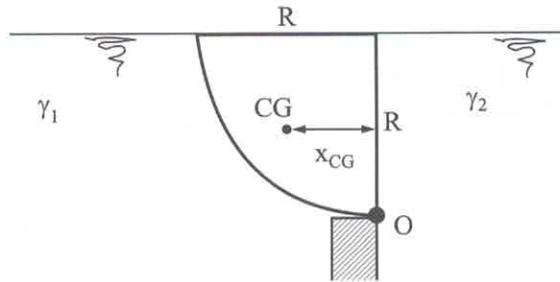
Resp.:  $F = 99,4 \text{ kN}$

2.28 O bujão cilíndrico da figura tem 0,6 m de diâmetro e 0,6 m de altura. Com água de um lado e óleo do outro, determinar o peso específico do material do bujão para mantê-lo em equilíbrio. Desprezar o atrito nas guias.



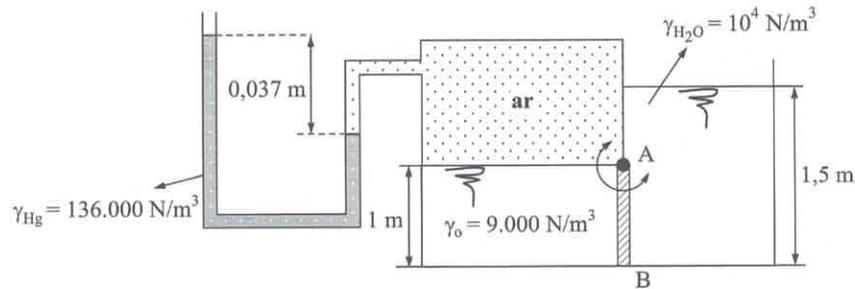
Resp.:  $\gamma_b = 35.000 \text{ N/m}^3$

- 2.29 A comporta da figura, em forma de  $\frac{1}{4}$  de cilindro, tem peso desprezível. Determinar a relação  $\gamma_1/\gamma_2$  entre os pesos específicos dos líquidos, para que a comporta não gire em torno do ponto O.  
 Dado:  $x_{CG} = \frac{4R}{3\pi}$



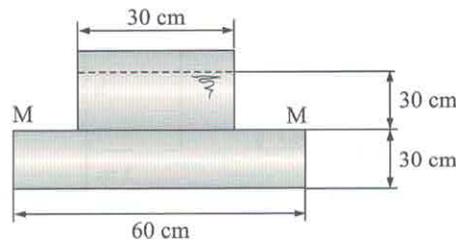
Resp.:  $\gamma_1/\gamma_2 = 1/3$

- 2.30 O reservatório da figura possui uma parede móvel AB, articulada em A. Sua largura é 1,5 m e está em equilíbrio nas condições indicadas. Calcular:  
 a) a força que age na face direita da comporta devido à água;  
 b) a força que deve ser aplicada em B para que seja mantido o equilíbrio.



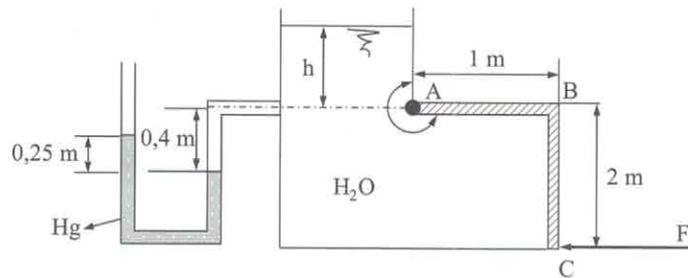
Resp.: a) 15.000 N; b) 465 N.

- 2.31 A figura mostra um tanque cilíndrico. Qual é a força no fundo? Qual é a força na superfície anular MM? O tanque é aberto à atmosfera. Dado:  $\gamma = 10.000 N/m^3$ .



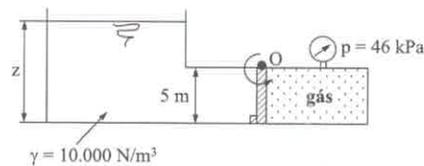
Resp.:  $F_F = 1.700 N$ ;  $F_M = 636 N$

- 2.32 No esquema da figura, determinar a altura h e a mínima força F para que a comporta ABC permaneça em equilíbrio. Dados: largura = 1,5 m;  $\gamma_{Hg} = 136.000 N/m^3$ ;  $\gamma_{H_2O} = 10.000 N/m^3$ .



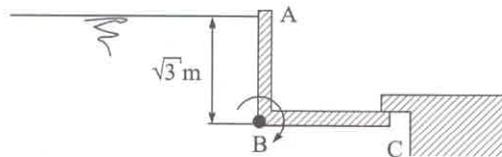
Resp.:  $h = 3 \text{ m}$ ;  $F = 76.230 \text{ N}$

- 2.33 Determinar o mínimo valor de  $z$  para o qual a comporta da figura girará em torno de ponto O, se a comporta é retangular e tem largura 2 m.



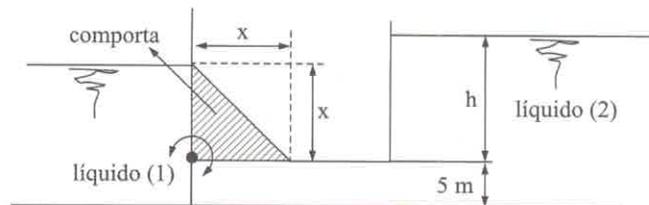
Resp.:  $z = 6,27 \text{ m}$

- 2.34 A comporta ABC da figura é rígida e pode girar em torno de B. Sabendo que está em equilíbrio, determinar o comprimento BC.



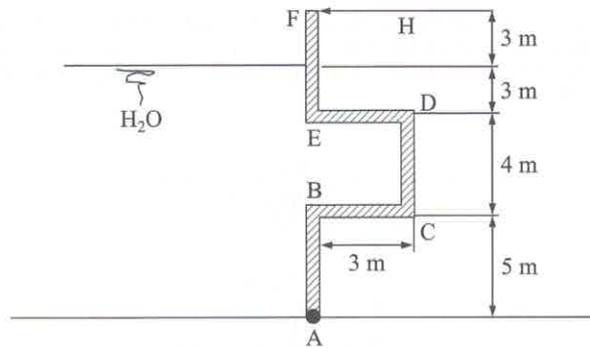
Resp.:  $BC = 1 \text{ m}$

- 2.35 Sabendo que  $\gamma_1 = 6 \gamma_2$ , calcular a relação  $x/h$  para que a comporta permaneça em equilíbrio na posição indicada na figura. Desprezar o peso próprio da comporta.



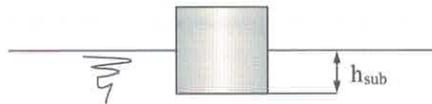
Resp.:  $x/h = 1/2$

- 2.36 A comporta ABCDEF da figura, articulada no extremo A, mantém-se na condição de equilíbrio pela ação da força H aplicada em F. Sendo  $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$  e a largura da comporta igual a 1 m, determinar o valor de H e o da força vertical que solicita a articulação em A.



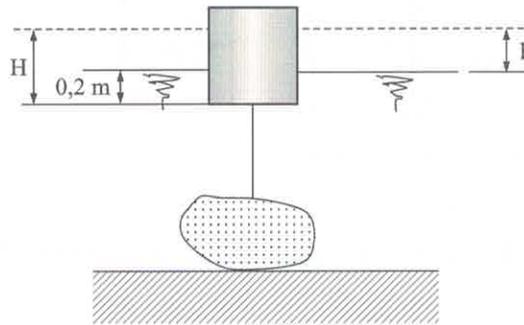
Resp.:  $H = 204 \text{ kN}$ ;  $V = 120 \text{ kN}$

2.37 Um cilindro de ferro fundido, de 30 cm de diâmetro e 30 cm de altura, é imerso em água do mar ( $\gamma = 10.300 \text{ N/m}^3$ ). Qual é o empuxo que a água exerce no cilindro? Qual seria o empuxo se o cilindro fosse de madeira ( $\gamma = 7.500 \text{ N/m}^3$ )? Nesse caso, qual seria a altura submersa do cilindro?



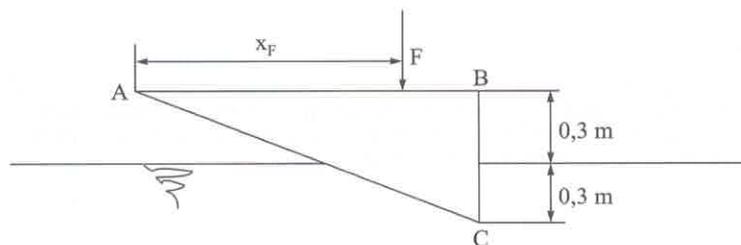
Resp.:  $E = 218 \text{ N}$ ;  $E = 159 \text{ N}$ ;  $h_{\text{sub}} = 0,218 \text{ m}$

2.38 Um cilindro que pesa 500 N e cujo diâmetro é 1 m flutua na água ( $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ ), com seu eixo na vertical, como mostra a figura. A âncora consiste de  $0,23 \text{ m}^3$  de concreto de peso específico  $25.000 \text{ N/m}^3$ . Qual é a elevação da maré necessária para elevar a âncora do fundo? (Desprezar o peso da barra.)



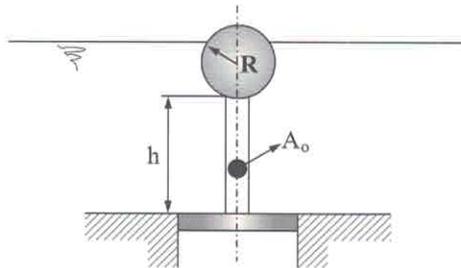
Resp.:  $h = 0,3 \text{ m}$

2.39 O corpo maciço de seção triangular e largura 1 m deve flutuar na posição indicada pela figura. Calcular a força a ser aplicada no plano da superfície AB e a sua distância ao ponto A. Dados: peso específico do corpo  $\gamma_c = 2.000 \text{ N/m}^3$ ;  $AB = 1,8 \text{ m}$ ;  $BC = 0,6 \text{ m}$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000 \text{ N/m}^3$ .



Resp.:  $x_F = 2,7 \text{ m}$ ;  $F = 270 \text{ N}$

- 2.40 Um sistema de bóia é utilizado para abrir um reservatório de água quando o nível deste atinge o plano diametral da esfera. Calcular a área do disco de fechamento do reservatório, sabendo que a área da seção transversal da haste é  $A_o = 0,02 \text{ m}^2$  e o peso do conjunto (esfera, haste e disco) é 55 N. Dados:  $h = 3 \text{ m}$ ;  $R = 0,3 \text{ m}$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ .

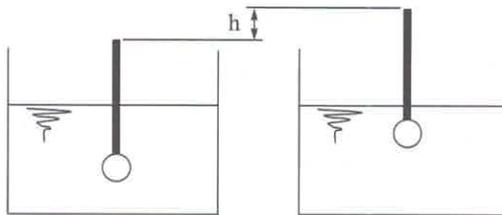


Resp.:  $A_d = 336 \text{ cm}^2$

- 2.41 Um corpo pesa 800 N no ar e, quando imerso em água ( $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ ), tem um peso aparente de 500 N. Determinar o volume do corpo e seu peso específico. Observação: peso aparente é o peso do corpo menos o empuxo.

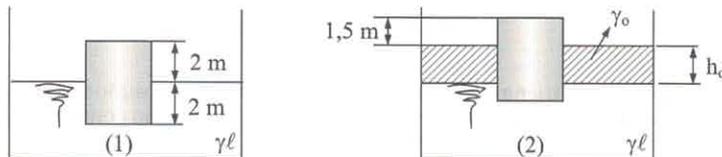
Resp.:  $V = 0,03 \text{ m}^3$ ;  $\gamma = 26.670 \text{ N/m}^3$

- 2.42 Um densímetro pesa  $2,2 \times 10^{-2} \text{ N}$ . A sua parte superior é constituída de uma haste cilíndrica de 5 mm de diâmetro. Qual será a diferença de altura de flutuação quando o densímetro estiver mergulhado em dois líquidos de peso específico  $7.800 \text{ N/m}^3$  e  $8.200 \text{ N/m}^3$ , respectivamente?



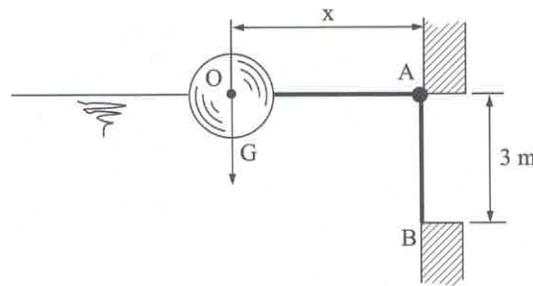
Resp.:  $h = 7,2 \text{ mm}$

- 2.43 Determinar a altura de óleo ( $\gamma_o = 6.000 \text{ N/m}^3$ ) para que o corpo ( $\gamma_c = 8.000 \text{ N/m}^3$ ) passe da posição (1) para a posição (2).



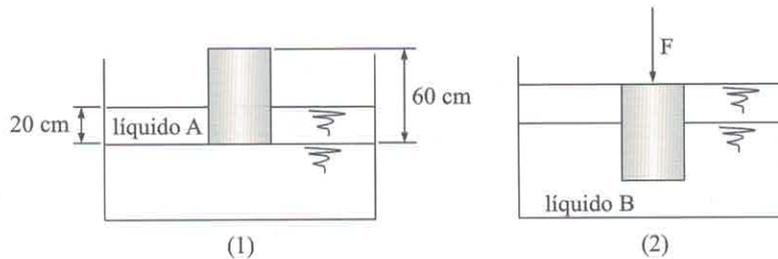
Resp.:  $h_o = 0,8 \text{ m}$

- 2.44 A comporta de perfil AB, articulada em A e de largura 1 m, possui uma bóia esférica de diâmetro  $D = 2 \text{ m}$  e peso  $G = 6.000 \text{ N}$ . Sabendo que a comporta se abre quando o nível da água atinge o ponto A, conforme mostra a figura, calcular a distância  $x$  do centro da bóia até a articulação A. Observação: considerar o peso da comporta AB desprezível. Dados:  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ .



Resp.:  $x = 6 \text{ m}$

2.45 Um cilindro, de peso específico  $\gamma_c = 5.000 \text{ N/m}^3$ , flutua num líquido, conforme mostra a figura (1). Sob a ação de uma força  $F = 10.000 \text{ N}$ , o cilindro permanece na posição indicada na figura (2). Determinar os pesos específicos dos líquidos A e B. Dado: área da base do cilindro =  $1 \text{ m}^2$ .

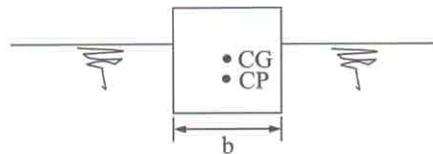


Resp.:  $\gamma_A = 15.000 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_B = 25.000 \text{ N/m}^3$

2.46 Um balão esférico de 12 m de diâmetro está cheio de hidrogênio. Se a leitura do barômetro é 700 mmHg e a temperatura é  $20^\circ \text{C}$ , qual o peso do conjunto balão e lastro para que seja mantido estacionário? Dados:  $R_{ar} = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ ;  $R_{H_2} = 41.400 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ .

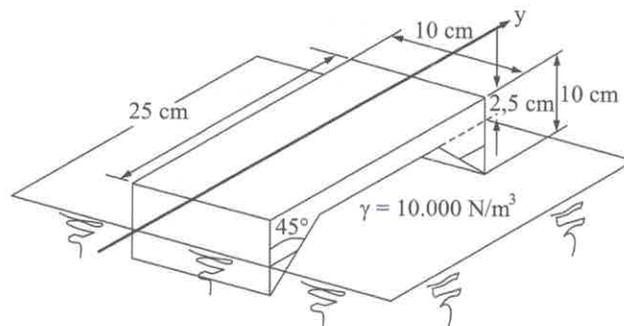
Resp.: 10.171 N

2.47 Um cubo de peso específico  $\gamma_c$  flutua num líquido de peso específico  $\gamma_\ell$ . Determinar a relação  $\gamma_c/\gamma_\ell$  para que o cubo flutue com as arestas na vertical.



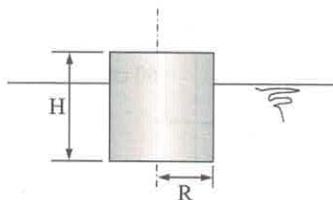
Resp.:  $0 < \frac{\gamma_c}{\gamma_\ell} < 0,21$ ;  $0,79 < \frac{\gamma_c}{\gamma_\ell} < 1$

2.48 Um objeto de madeira é mostrado na figura. O seu peso é 2,5 N e o centro de gravidade está a 5 cm da superfície superior. O equilíbrio é estável em relação ao eixo y?



Resp.: É estável ( $r = 0,037$  m).

2.49 Qual a máxima altura  $H$  de um cilindro de seção circular de raio  $R$ , para que possa flutuar em equilíbrio estável com seu eixo na vertical em qualquer líquido? Dados: cilindro ( $\gamma$ ); líquido ( $\gamma_l$ ).



$$\text{Resp.: } \frac{H}{R} < \frac{1}{\sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma_l} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_l}\right)}}$$

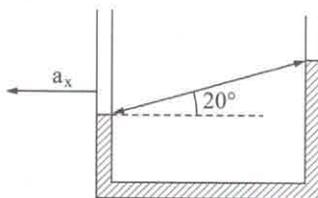
2.50 Determinar a diferença de pressão entre dois pontos genéricos de um tanque cheio de água acelerado verticalmente para cima com uma aceleração  $a_y = 5$  g.

Resp.:  $\Delta p = 6\gamma\Delta z$

2.51 Um tubo em U contendo água é montado num carro de corrida. O carro parte com aceleração constante e 5 s após a partida a água no tubo em U apresenta a configuração indicada. Sendo  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>:

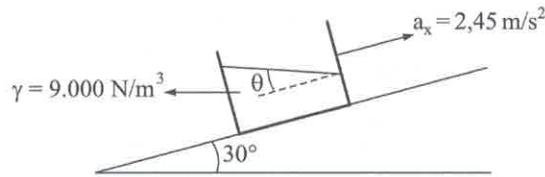
a) Qual é a aceleração?

b) Qual é a velocidade do carro nesse instante?



Resp.:  $a = 3,57$  m/s<sup>2</sup>;  $v = 64,2$  km/h

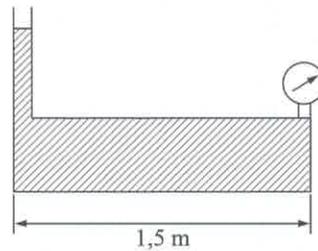
2.52 Um tanque cúbico de 0,6 m de lado, com óleo até a metade, é acelerado ao longo de um plano inclinado de 30° com a horizontal. Determinar a inclinação da superfície livre em relação ao plano inclinado.



Resp.:  $\theta = 41^\circ$

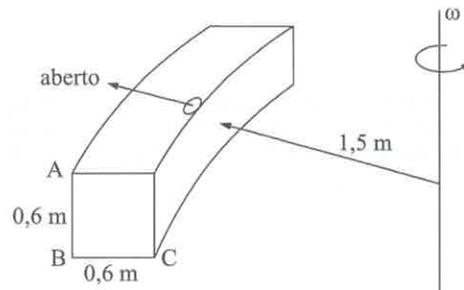
2.53 Um acelerômetro é constituído de um tanque e de um manômetro metálico, como indica a figura. Adiciona-se mercúrio no tubo até que a leitura no manômetro seja 175 kPa. Dados:  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Pede-se:

- Qual é a leitura do mercúrio no piezômetro?
- Qual é a aceleração horizontal que provoca uma leitura de 140 kPa no manômetro, supondo inalterado o nível do mercúrio?



Resp.:  $h = 1,29 \text{ m}$ ;  $a = 1,72 \text{ m/s}^2$

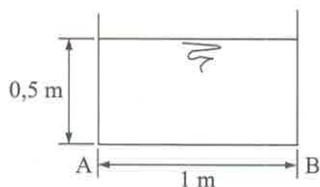
2.54 Um tanque fechado, com a forma indicada na figura, com 0,6 m de lado, gira em torno de um eixo com rotação  $n = 100 \text{ rpm}$  e a uma distância radial de 1,5 m. Qual é a pressão nos pontos A, B e C? ( $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ;  $p_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$ )



Resp.:  $p_A = 120 \text{ kPa (abs)}$ ;  $p_B = 126 \text{ kPa (abs)}$ ;  $p_C = 106 \text{ kPa (abs)}$

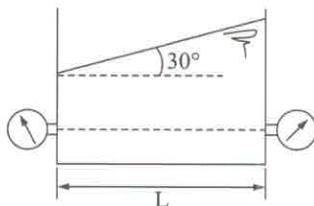
2.55 Um veículo move-se com velocidade constante de 100 km/h para a direita, carregando um recipiente retangular aberto que contém água. O veículo é freado em 10 s até parar com desaceleração constante. Dados:  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ; não há transbordamento. Determinar:

- a inclinação da superfície livre em relação à horizontal, durante a frenagem;
- a pressão nos pontos A e B durante a frenagem.



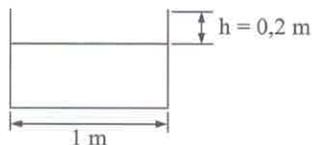
Resp.:  $\theta = 15^\circ 30'$ ;  $p_B = 6.400 \text{ Pa}$ ;  $p_A = 3.600 \text{ Pa}$

- 2.56 Um recipiente aberto à atmosfera está situado sobre um veículo que se movimenta com uma aceleração  $a_0$  constante. A superfície livre da água do recipiente forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Os manômetros situados nas paredes do recipiente indicam  $100 \text{ kPa}$  e  $110 \text{ kPa}$ . Calcular o comprimento  $L$  do recipiente e a aceleração  $a_0$ . Dados:  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



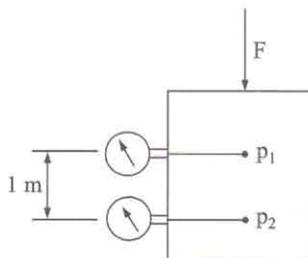
Resp.:  $L = 1,73 \text{ m}$ ;  $a_0 = 5,8 \text{ m/s}^2$

- 2.57 Um veículo carrega um recipiente que contém água, movimentando-se com uma velocidade constante de  $72 \text{ km/h}$ . Calcular o tempo mínimo de frenagem com desaceleração constante para que a água não transborde. Dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ .



Resp.:  $t = 5 \text{ s}$

- 2.58 Um tanque, cheio de água e totalmente fechado, cai verticalmente sob a ação da gravidade e de uma força  $F$ . Dois manômetros situados a uma distância vertical  $h = 1 \text{ m}$  indicam  $p_1 = 20 \text{ cm de Hg}$  e  $p_2 = 10 \text{ cm de Hg}$ . Determinar a intensidade da força  $F$ . Dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ; massa do conjunto =  $1.000 \text{ kg}$ .



Resp.:  $F = 13,6 \text{ kN}$



# CAPÍTULO 3

## Cinemática dos fluidos

### 3.1 Regimes ou movimentos variado e permanente

Regime permanente é aquele em que as propriedades do fluido são invariáveis em cada ponto com o passar do tempo. Note-se que as propriedades do fluido podem variar de ponto para ponto, desde que não haja variações com o tempo. Isso significa que, apesar de um certo fluido estar em movimento, a configuração de suas propriedades em qualquer instante permanece a mesma. Um exemplo prático disso será o escoamento pela tubulação do tanque da Figura 3.1, desde que o nível dele seja mantido constante.

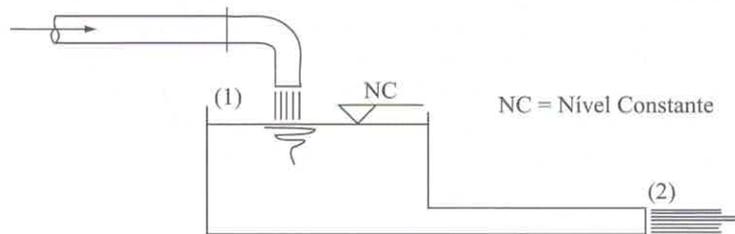


Figura 3.1

Nesse tanque, a quantidade de água que entra em (1) é idêntica à quantidade de água que sai por (2); nessas condições, a configuração de todas as propriedades do fluido, como velocidade, massa específica, pressão etc., será, em cada ponto, a mesma em qualquer instante. Note-se que em cada ponto a velocidade, por exemplo, é diferente, assim como a pressão o será, pela lei de Stevin.

Regime variado é aquele em que as condições do fluido em alguns pontos ou regiões de pontos variam com o passar do tempo. Se no exemplo da Figura 3.1 não houver fornecimento de água por (1), o regime será variado em todos os pontos.

Denomina-se reservatório de grandes dimensões um reservatório do qual se extrai ou no qual se admite fluido, mas, devido à sua dimensão transversal muito extensa, o nível não varia sensivelmente com o passar do tempo.

Em um reservatório de grandes dimensões, o nível mantém-se aproximadamente constante com o passar do tempo, de forma que o regime pode ser considerado aproximadamente permanente.

A Figura 3.2a mostra um reservatório de grandes dimensões, em que, apesar de haver uma descarga do fluido, o nível não varia sensivelmente com o passar do tempo, e o regime pode ser considerado permanente.

A Figura 3.2b mostra um reservatório em que a seção transversal é relativamente pequena em face da descarga do fluido. Isso faz com que o nível dele varie sensivelmente com o passar do tempo, havendo uma variação sensível da configuração do sistema, caracterizando um regime variado.

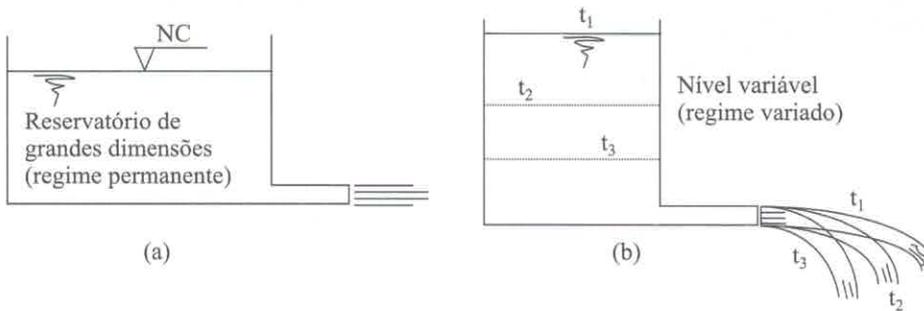


Figura 3.2

### 3.2 Escoamentos laminar e turbulento

Para definir esses dois tipos de escoamentos, recorre-se à experiência de Reynolds (1883), que demonstrou a sua existência.

Seja, por exemplo, um reservatório que contém água. Um tubo transparente é ligado ao reservatório e, no fim deste, uma válvula permite a variação da velocidade de descarga da água. No eixo do tubo é injetado um líquido corante do qual se deseja observar o comportamento (Figura 3.3). Nota-se que ao abrir pouco a válvula, portanto para pequenas velocidades de descarga, forma-se um filete reto e contínuo de fluido colorido no eixo do tubo (3). Ao abrir mais a válvula (5), o filete começa a apresentar ondulações e finalmente desaparece a uma pequena distância do ponto de injeção. Nesse último caso, como o nível (2) continua descendo, conclui-se que o fluido colorido é injetado, mas, devido a movimentos transversais do escoamento, é totalmente diluído na água do tubo (3). Esses fatos denotam a existência de dois tipos de escoamentos separados por um escoamento de transição.

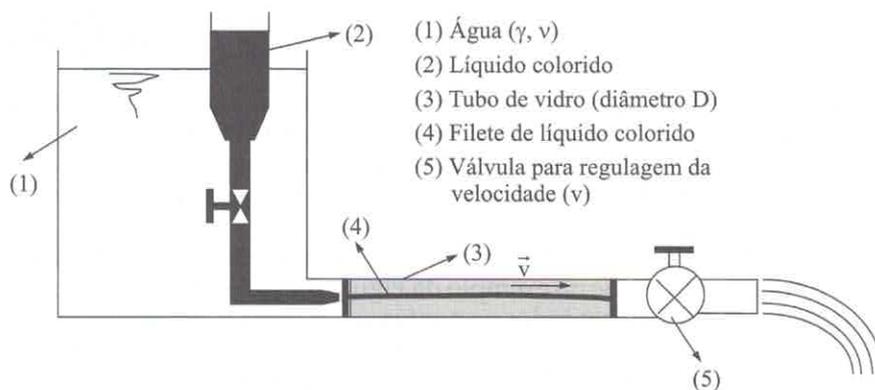


Figura 3.3

No primeiro caso, em que é observável o filete colorido reto e contínuo, conclui-se que as partículas viajam sem agitações transversais, mantendo-se em lâminas concêntricas, entre as quais não há troca macroscópica de partículas.

No segundo caso, as partículas apresentam velocidades transversais importantes, já que o filete desaparece pela diluição de suas partículas no volume de água.

Escoamento laminar é aquele em que as partículas se deslocam em lâminas individualizadas, sem trocas de massa entre elas.

Escoamento turbulento é aquele em que as partículas apresentam um movimento aleatório macroscópico, isto é, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento geral do conjunto do fluido.

O escoamento laminar é o menos comum na prática, mas pode ser visualizado num filete de água de uma torneira pouco aberta ou no início da trajetória seguida pela fumaça de um cigarro, já que a uma certa distância dele notam-se movimentos transversais.

Reynolds verificou que o fato de o movimento ser laminar ou turbulento depende do valor do número adimensional dado por:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} \quad (3.1)$$

Essa expressão se chama número de Reynolds e mostra que o tipo de escoamento depende do conjunto de grandezas  $v$ ,  $D$  e  $\nu$ , e não somente de cada uma delas. Esse aspecto será mais bem discutido no capítulo de análise dimensional.

Reynolds verificou que, no caso de tubos, seriam observados os seguintes valores:

$\text{Re} < 2.000$	Escoamento laminar
$2.000 < \text{Re} < 2.400$	Escoamento de transição
$\text{Re} > 2.400$	Escoamento turbulento

Note-se que o movimento turbulento é variado por natureza, devido às flutuações da velocidade em cada ponto. Pode-se, no entanto, muitas vezes, considerá-lo permanente, adotando em cada ponto a média das velocidades em relação ao tempo. Esse fato é comprovado na prática, já que somente aparelhos muito sensíveis conseguem indicar as flutuações dos valores das propriedades em cada ponto.

A maioria dos aparelhos, devido ao fato de apresentarem uma certa inércia na medição, indicará um valor permanente em cada ponto que corresponderá exatamente à média citada anteriormente (Figura 3.4).

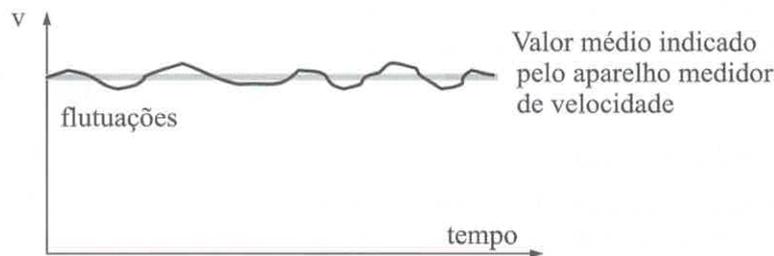


Figura 3.4

Assim, mesmo que o escoamento seja turbulento, poderá, em geral, ser admitido como permanente em média nas aplicações.

### 3.3 Trajetória e linha de corrente

Trajetoira é o lugar geométrico dos pontos ocupados por uma partícula em instantes sucessivos. Note-se que a equação de uma trajetória será função do ponto inicial, que individualiza a partícula, e do tempo. Uma visualização da trajetória será obtida por meio de uma fotografia, com tempo longo de exposição, de um flutuante colorido colocado num fluido em movimento (Figura 3.5).

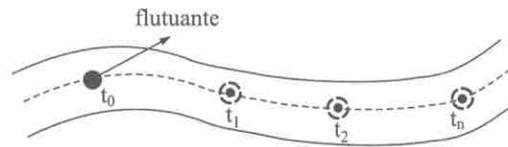


Figura 3.5

Linha de corrente é a linha tangente aos vetores da velocidade de diferentes partículas no mesmo instante. Note-se que, na equação de uma linha de corrente, o tempo não é uma variável, já que a noção se refere a um certo instante.

A visualização pode ser feita lançando, por exemplo, serragem em diversos pontos do escoamento e tirando em seguida uma fotografia instantânea. A serragem irá, num pequeno intervalo de tempo, apresentar um curto espaço percorrido que representará o vetor velocidade no ponto.

A linha de corrente será obtida traçando-se na fotografia a linha tangente aos traços de serragem (Figura 3.6).

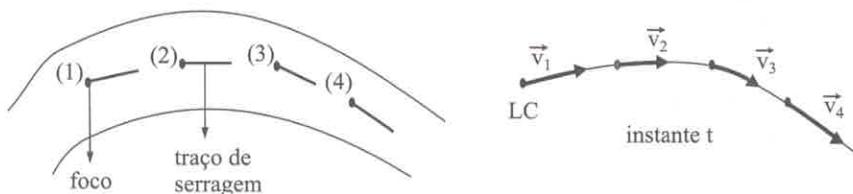


Figura 3.6

As linhas de corrente e as trajetórias coincidem geometricamente no regime permanente.

Tubo de corrente é a superfície de forma tubular formada pelas linhas de corrente que se apóiam numa linha geométrica fechada qualquer (Figura 3.7).

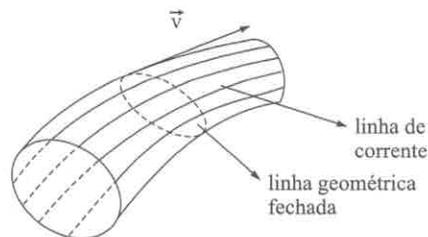


Figura 3.7

### Propriedades dos tubos de corrente

- Os tubos de corrente são fixos quando o regime é permanente.
- Os tubos de corrente são impermeáveis à passagem de massa, isto é, não existe passagem de partículas de fluido através do tubo de corrente.

A propriedade (a) é óbvia, já que, quando o regime é permanente, não há variação da configuração do fluido e de suas propriedades. A propriedade (b) pode ser verificada por absurdo, supondo que uma partícula cruze o tubo de corrente. Para que isso ocorresse, seria necessário que o vetor da velocidade fosse oblíquo em relação ao tubo de corrente, o que não pode acontecer, pois ele é formado de linhas de corrente que, por definição, são tangentes aos vetores da velocidade.

Essa propriedade é muito importante, pois em regime permanente garante que as partículas de fluido que entram de um lado do tubo de corrente deverão sair do outro, não havendo adição nem subtração de partículas através do tubo. A sua utilidade será vista nas equações básicas de mecânica dos fluidos.

### 3.4 Escoamento unidimensional ou uniforme na seção

O escoamento é dito unidimensional quando uma única coordenada é suficiente para descrever as propriedades do fluido. Para que isso aconteça, é necessário que as propriedades sejam constantes em cada seção (Figura 3.8).

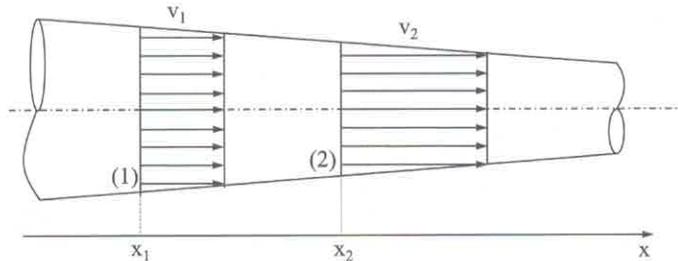


Figura 3.8

Na figura, pode-se observar que em cada seção a velocidade é a mesma, em qualquer ponto, sendo suficiente fornecer o seu valor em função da coordenada  $x$  para obter sua variação ao longo do escoamento. Diz-se, nesse caso, que o escoamento é uniforme nas seções.

Na Figura 3.9 observa-se um escoamento bidimensional, em que a variação da velocidade é função das duas coordenadas  $x$  e  $y$ . Nesse escoamento, o diagrama de velocidades repete-se identicamente em planos paralelos ao plano  $x,y$ .

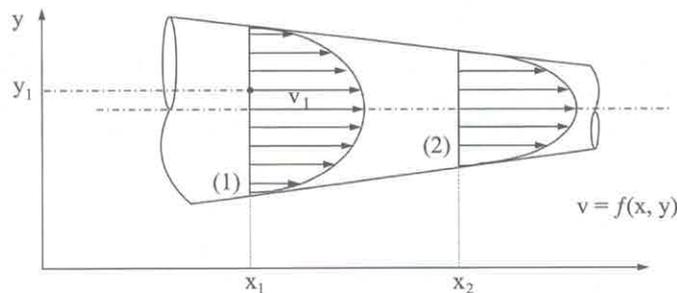


Figura 3.9

O escoamento no espaço pode ser tridimensional (Figura 3.10).

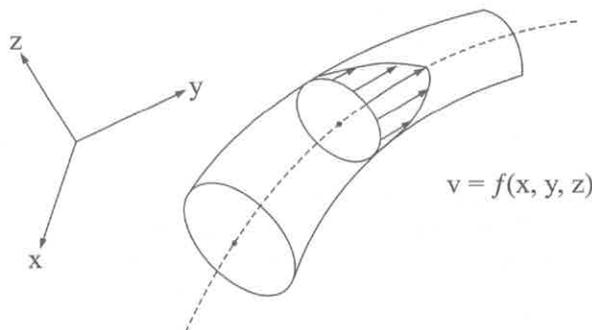


Figura 3.10

Note-se que, com o aumento do número de dimensões, as equações se complicam e é conveniente, sempre que possível, descrever o escoamento de forma unidimensional conforme um critério que será apresentado posteriormente.

### 3.5 Vazão — Velocidade média na seção

A vazão em volume pode ser definida facilmente pelo exemplo da Figura 3.11.

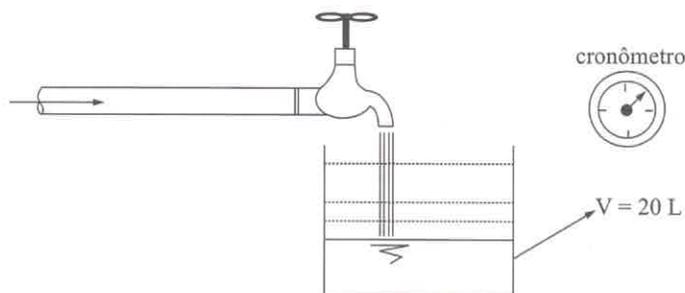


Figura 3.11

Suponha-se que, estando a torneira aberta, seja empurrado o recipiente da Figura 3.11 embaixo dela e simultaneamente seja disparado o cronômetro. Admita-se que o recipiente encha em 10 s.

Pode-se então dizer que a torneira enche 20 L em 10 s ou que a vazão em volume da torneira é  $\frac{20 \text{ L}}{10 \text{ s}} = 2 \text{ L/s}$ .

Define-se vazão em volume  $Q$  como o volume de fluido que atravessa uma certa seção do escoamento por unidade de tempo.

$$Q = \frac{V}{t} \quad (3.2)$$

As unidades correspondem à definição:  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $\text{L/s}$ ,  $\text{m}^3/\text{h}$ ,  $\text{L/min}$ , ou qualquer outra unidade de volume ou capacidade por unidade de tempo.

Existe uma relação importante entre a vazão em volume e a velocidade do fluido (Figura 3.12).

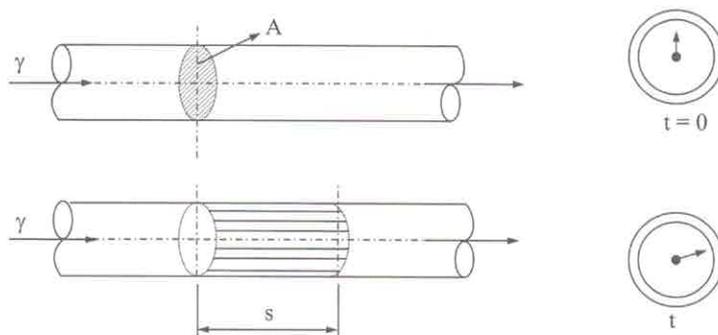


Figura 3.12

Suponha-se o fluido em movimento da Figura 3.12.

No intervalo de tempo  $t$ , o fluido se desloca através da seção de área  $A$  a uma distância  $s$ .

O volume de fluido que atravessa a seção de área  $A$  no intervalo de tempo  $t$  é  $V = sA$ .

Logo, a vazão será

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{sA}{t}, \quad \text{mas} \quad \frac{s}{t} = v$$

Logo:

$$Q = vA \quad (3.3)$$

É claro que essa expressão só seria verdadeira se a velocidade fosse uniforme na seção. Na maioria dos casos práticos, o escoamento não é unidimensional; no entanto, é possível obter uma expressão do tipo da Equação 3.3 definindo a velocidade média na seção.

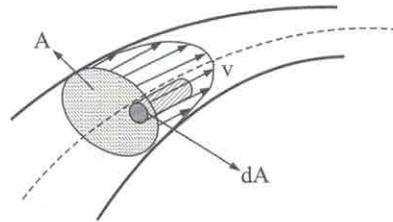


Figura 3.13

Obviamente, para o cálculo da vazão, não se pode utilizar a Equação 3.3, pois  $v$  é diferente em cada ponto da seção.

Adotando um  $dA$  qualquer no entorno de um ponto em que a velocidade genérica é  $v$ , como na Figura 3.13, tem-se:

$$dQ = v \, dA$$

Logo, a vazão na seção de área  $A$  será:

$$Q = \int_A v \, dA \tag{3.4}$$

Define-se velocidade média na seção como uma velocidade uniforme que, substituída no lugar da velocidade real, reproduziria a mesma vazão na seção.

Logo:

$$Q = \int_A v \, dA = v_m A \tag{3.5}$$

Dessa igualdade, surge a expressão para o cálculo da velocidade média na seção:

$$v_m = \frac{1}{A} \int_A v \, dA \tag{3.6}$$

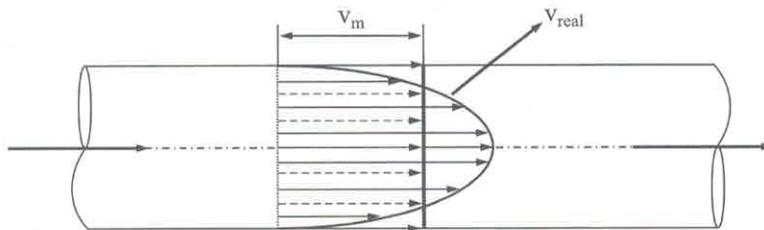
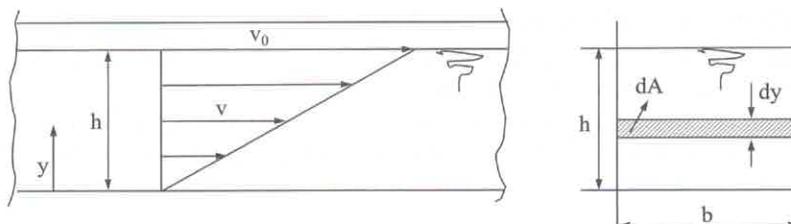


Figura 3.14

**EXEMPLO**

Determinar a velocidade média correspondente ao diagrama de velocidades a seguir. Supor que não haja variação da velocidade segundo a direção normal ao plano da figura (escoamento bidimensional).



Sendo o diagrama linear, tem-se  $v = C_1y + C_2$ , com  $C_1$  e  $C_2$  a serem determinados pelas condições de contorno.

Para  $y = 0$   $v = 0$ , logo:  $C_2 = 0$

Para  $y = h$   $v = v_0$ , logo:  $v_0 = C_1h$  e  $C_1 = \frac{v_0}{h}$

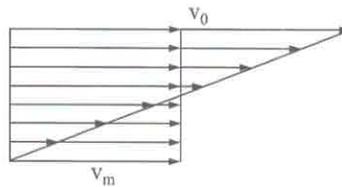
ou, finalmente,  $v = v_0 \frac{y}{h}$

A velocidade média será dada por:

$$V_m = \frac{1}{A} \int_A v \, dA = \frac{1}{bh} \int_0^h v_0 \frac{y}{h} b \, dy = \frac{v_0}{h^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^h$$

$$v_m = \frac{v_0}{2}$$

No diagrama a seguir está representado o resultado.



Assim como se define a vazão em volume, podem ser analogamente definidas as vazões em massa ( $Q_m$ ) e em peso ( $Q_G$ ).

$$Q_m = \frac{m}{t} \quad \text{onde } m = \text{massa de fluido} \quad (3.7)$$

$$Q_G = \frac{G}{t} \quad \text{onde } G = \text{peso de fluido} \quad (3.8)$$

Pela Equação 3.5,

$$Q = v_m A, \quad \text{mas} \quad Q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t}$$

$$\text{Logo:} \quad Q_m = \rho Q = \rho v_m A \quad (3.9)$$

$$\text{e} \quad Q_G = \frac{G}{t} = \frac{\gamma V}{t}$$

$$\text{ou} \quad Q_G = \gamma Q = \gamma v_m A \quad (3.10)$$

$$\text{Por outro lado,} \quad Q_G = \gamma Q = \rho g Q$$

$$\text{e} \quad Q_G = g Q_m \quad (3.11)$$

As unidades de vazão em massa serão kg/s, utm/s, kg/h e qualquer outra que indique massa por unidade de tempo.

As unidades de vazão em peso serão kgf/s, N/s, kgf/h e qualquer outra que indique peso por unidade de tempo.

### 3.6 Equação da continuidade para regime permanente

Seja o escoamento de um fluido por um tubo de corrente (Figura 3.15). Num tubo de corrente não pode haver fluxo lateral de massa.

Seja a vazão em massa na seção de entrada  $Q_{m1}$  e na saída  $Q_{m2}$ . Para que o regime seja permanente, é necessário que não haja variação de propriedades, em nenhum ponto do fluido, com o tempo.

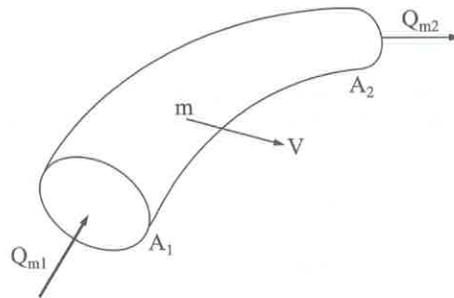


Figura 3.15

Se, por absurdo,  $Q_{m1} \neq Q_{m2}$ , então em algum ponto interno ao tubo de corrente haveria ou redução ou acúmulo de massa.

Dessa forma, a massa específica nesse ponto variaria com o tempo, o que contrariaria a hipótese de regime permanente. Logo:

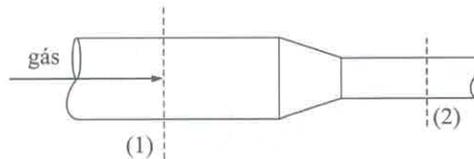
$$Q_{m1} = Q_{m2} \quad \text{ou} \quad \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad \text{ou} \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (3.12)$$

Essa é a equação da continuidade para um fluido qualquer em regime permanente.

### EXEMPLO

Um gás escoou em regime permanente no trecho de tubulação da figura. Na seção (1), tem-se  $A_1 = 20 \text{ cm}^2$ ,  $\rho_1 = 4 \text{ kg/m}^3$  e  $v_1 = 30 \text{ m/s}$ . Na seção (2),  $A_2 = 10 \text{ cm}^2$  e  $\rho_2 = 12 \text{ kg/m}^3$ .

Qual é a velocidade na seção (2)?



Solução

$$Q_{m1} = Q_{m2} \quad \text{Logo:} \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$\text{ou} \quad v_2 = v_1 \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2}$$

$$\text{portanto,} \quad v_2 = 30 \frac{4 \cdot 20}{12 \cdot 10} = 20 \text{ m/s}$$

Se o fluido for incompressível, então a massa específica na entrada e na saída do volume  $V$  deverá ser a mesma. Dessa forma, a Equação 3.12 ficará

$$\rho Q_1 = \rho Q_2$$

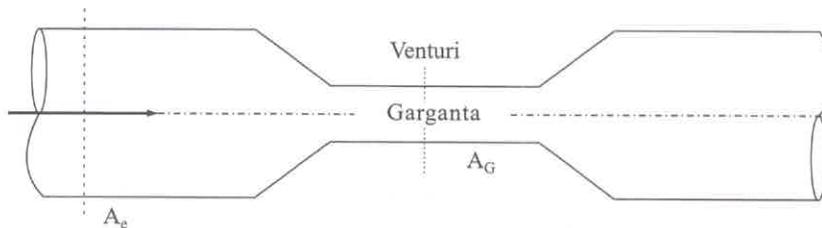
$$\text{ou} \quad Q_1 = Q_2 \quad \text{ou} \quad v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (3.13)$$

Logo, a vazão em volume de um fluido incompressível é a mesma em qualquer seção do escoamento. A Equação 3.13 é a equação da continuidade para um fluido incompressível. Fica subentendido que  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades médias nas seções (1) e (2).

A Equação 3.13 mostra que, ao longo do escoamento, velocidades médias e áreas são inversamente proporcionais, isto é, à diminuição da área correspondem aumentos da velocidade média na seção e vice-versa.

**EXEMPLO**

O Venturi é um tubo convergente/divergente, como é mostrado na figura. Determinar a velocidade na seção mínima (garganta) de área  $5 \text{ cm}^2$ , se na seção de entrada de área  $20 \text{ cm}^2$  a velocidade é  $2 \text{ m/s}$ . O fluido é incompressível.



Solução

Pela equação da continuidade:

$$v_e A_e = v_G A_G$$

$$v_G = v_e \frac{A_e}{A_G} = 2 \frac{20}{5} = 8 \text{ m/s}$$

Para o caso de diversas entradas e saídas de fluido, a Equação 3.12 pode ser generalizada por uma somatória de vazões em massa na entrada (e) e outra na saída (s), isto é,

$$\sum_e Q_m = \sum_s Q_m \quad (3.14)$$

Se o fluido for incompressível e for o mesmo em todas as seções, isto é, se for homogêneo, a Equação 3.13 poderá ser generalizada por

$$\sum_e Q = \sum_s Q \quad (3.15)$$

Apesar de a Equação 3.14 só poder chegar à Equação 3.15 quando se tratar de um único fluido, pode-se verificar que é válida também para diversos fluidos, desde que sejam todos incompressíveis (vide o Exercício 3.7).

### 3.7 Velocidade e aceleração nos escoamentos de fluidos

Antes de mostrar a determinação das grandezas cinemáticas do item 3.7, convém ressaltar alguma coisa sobre sistemas de referência. Note-se que os sistemas que podem ser utilizados são inerciais ou em movimento, dependendo da conveniência do problema estudado. O que realmente interessa é o movimento relativo entre o fluido e o objeto. Assim, no movimento de um barco dentro da água, é interessante fixar o sistema ao barco e pensar no fluido em movimento em torno dele. Esse é o ponto de vista utilizado quando se testa um modelo de navio num tanque de provas. Note-se que a noção de regime permanente e variado é função do observador ou do sistema de referência. Assim, um problema de regime variado poderá ser reduzido a um em regime permanente por uma escolha conveniente do sistema de referência.

Seja, por exemplo, o movimento de um barco em água parada. Para um observador fixado à margem do lago, por exemplo, o movimento é variado, pois pontos da água que num certo instante estavam parados irão adquirir um certo movimento quando o barco passar num instante sucessivo. Se, porém, o observador for fixado ao barco, a configuração do movimento do fluido em torno do barco será sempre a mesma, sendo o regime permanente.

A simples observação desse fato permitirá simplificar muitos problemas às vezes complicados para um sistema de referência inercial.

Vejam os como determinar a aceleração das partículas de um fluido no caso de regime permanente e no caso de regime variado.

Seja  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$  a velocidade num sistema cartesiano.

Se o regime for permanente, nem a velocidade nem suas componentes serão função do tempo, sendo somente funções do ponto.

$$\text{Logo: } \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z) \\ v_y &= v_y(x, y, z) \\ v_z &= v_z(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mas  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , que, como função de função, permite escrever:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

mas 
$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

Logo: 
$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

mas 
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial y} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

As equações em coordenadas cartesianas ficarão, segundo suas componentes:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_y = a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_z = a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.17)$$

No caso de fluido em regime variado, deve-se considerar, em relação às equações 3.17, também a variação com o tempo, ficando as equações:

$$a_x = \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$a_y = \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$a_z = \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

As equações 3.17 representam a aceleração de transporte, pois indicam a variação da velocidade somente com a mudança de posição.

Nas equações 3.18, as parcelas  $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v_y}{\partial t}$  e  $\frac{\partial v_z}{\partial t}$  representam a aceleração local, pois indicam a variação da velocidade num certo ponto, somente com o tempo.

As equações 3.18 mostram que as partículas do fluido podem apresentar aceleração mesmo quando a velocidade é constante em cada ponto com o tempo, pois pode-se ter variações de ponto para ponto, conforme pode ser constatado pelas equações 3.17.

Somente se a velocidade for a mesma em todos os pontos, em qualquer instante, a aceleração será nula. Esse fato é muito importante no desenvolvimento da equação da quantidade de movimento, que veremos no Capítulo 5.

### EXEMPLO

Num escoamento no plano Oxy, o campo de velocidades é dado por  $v_x = 2xt$  e  $v_y = y^2t$ . Determinar a aceleração na origem e no ponto  $P \equiv (1,2)$  no instante  $t = 5$  s (medidas em cm).

Solução

O movimento é variado, pois  $v_x$  e  $v_y$  são funções do tempo.

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_x = 2x + 2xt(2t) + y^2 t(0) = 2x + 4xt^2$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_y = y^2 + 2xt(0) + y^2 t(2yt) = y^2 + 2y^3 t^2$$

No instante  $t = 5$  s

$$a_x = 2x + 4x(25) = 102x$$

$$a_y = y^2 + 2y^3(25) = y^2 + 50y^3$$

No ponto  $P \equiv (1,2)$

$$a_x = 102 \times 1 = 102$$

$$a_y = (2)^2 + 50(2)^3 = 4 + 400 = 404$$

Logo:

$$\vec{a}_{(P,t)} = 102\vec{e}_x + 404\vec{e}_y$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(102)^2 + (404)^2} = 416 \text{ cm/s}^2$$

### EXERCÍCIOS

- 3.1 No escoamento laminar de um fluido em condutos circulares, o diagrama de velocidades é representado pela equação  $v = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$ , onde  $v_{\max}$  é a velocidade no eixo do conduto,  $R$  é o raio do conduto e  $r$  é um raio genérico para o qual a velocidade  $v$  é genérica. Verificar que  $v_m/v_{\max} = 0,5$ , onde  $v_m$  = velocidade média na seção.
- 3.2 No escoamento turbulento de um fluido em condutos circulares, o diagrama de velocidades é dado pela equação  $v = v_{\max} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7}$ , onde todas as grandezas têm o mesmo significado do Exercício 3.1. Verificar que  $v_m/v_{\max} = 49/60$ .

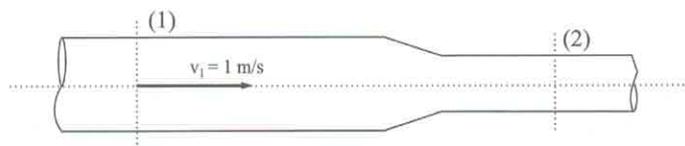
- 3.3 Um gás ( $\gamma = 5 \text{ N/m}^3$ ) escoam em regime permanente com uma vazão de  $5 \text{ kg/s}$  pela seção A de um conduto retangular de seção constante de  $0,5 \text{ m}$  por  $1 \text{ m}$ . Em uma seção B, o peso específico do gás é  $10 \text{ N/m}^3$ . Qual será a velocidade média do escoamento nas seções A e B? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

Resp.:  $v_A = 20 \text{ m/s}$ ;  $v_B = 10 \text{ m/s}$

- 3.4 Uma torneira enche de água um tanque, cuja capacidade é  $6.000 \text{ L}$ , em  $1 \text{ h}$  e  $40 \text{ min}$ . Determinar a vazão em volume, em massa e em peso em unidade do SI se  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.000 \text{ kg/m}^3$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

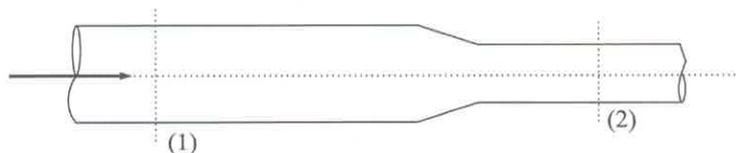
Resp.:  $Q = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $Q_m = 1 \text{ kg/s}$ ;  $Q_G = 10 \text{ N/s}$

- 3.5 No tubo da figura, determinar a vazão em volume, em massa, em peso e a velocidade média na seção (2), sabendo que o fluido é água e que  $A_1 = 10 \text{ cm}^2$  e  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$ . ( $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



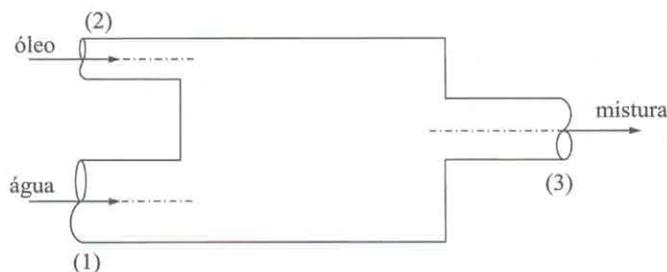
Resp.:  $Q = 1 \text{ L/s}$ ;  $Q_m = 1 \text{ kg/s}$ ;  $Q_G = 10 \text{ N/s}$ ;  $v_2 = 2 \text{ m/s}$ .

- 3.6 O ar escoam num tubo convergente. A área da maior seção do tubo é  $20 \text{ cm}^2$  e a da menor é  $10 \text{ cm}^2$ . A massa específica do ar na seção (1) é  $1,2 \text{ kg/m}^3$ , enquanto na seção (2) é  $0,9 \text{ kg/m}^3$ . Sendo a velocidade na seção (1)  $10 \text{ m/s}$ , determinar as vazões em massa, volume, em peso e a velocidade média na seção (2).



Resp.:  $v_2 = 26,7 \text{ m/s}$ ;  $Q_m = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$ ;  $Q_1 = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $Q_2 = 0,0267 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $Q_G = 0,24 \text{ N/s}$

- 3.7 Um tubo admite água ( $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ) num reservatório com uma vazão de  $20 \text{ L/s}$ . No mesmo reservatório é trazido óleo ( $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) por outro tubo com uma vazão de  $10 \text{ L/s}$ . A mistura homogênea formada é descarregada por um tubo cuja seção tem uma área de  $30 \text{ cm}^2$ . Determinar a massa específica da mistura no tubo de descarga e sua velocidade.

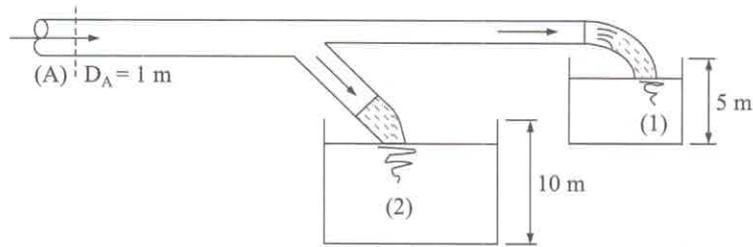


Resp.:  $\rho_3 = 933 \text{ kg/m}^3$ ;  $v_3 = 10 \text{ m/s}$

- 3.8 Água é descarregada de um tanque cúbico de  $5 \text{ m}$  de aresta por um tubo de  $5 \text{ cm}$  de diâmetro. A vazão no tubo é  $10 \text{ L/s}$ . Determinar a velocidade de descida da superfície livre da água do tanque e, supondo desprezível a variação da vazão, determinar quanto tempo o nível da água levará para descer  $20 \text{ cm}$ .

Resp.  $v = 4 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ ;  $t = 500 \text{ s}$

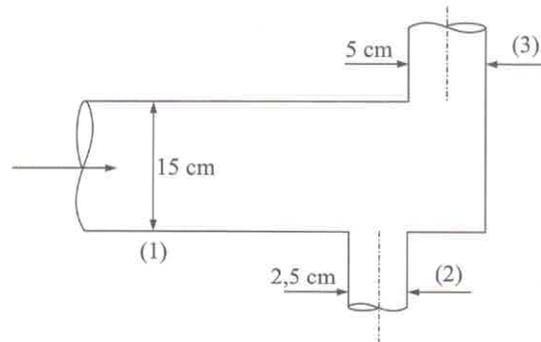
- 3.9 Os reservatórios da figura são cúbicos. São enchidos pelos tubos, respectivamente, em 100 s e 500 s. Determinar a velocidade da água na seção (A), sabendo que o diâmetro do conduto nessa seção é 1 m.



Resp.:  $v_A = 4,14 \text{ m/s}$

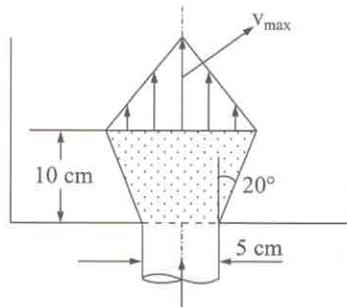
- 3.10 A água escoá por um conduto que possui dois ramais em derivação. O diâmetro do conduto principal é 15 cm e os das derivações são 2,5 cm e 5 cm, respectivamente. O perfil das velocidades no conduto principal é dado por:  $v = v_{\max_1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_1} \right)^2 \right]$  e nas derivações por:  $v = v_{\max_{2,3}} \left( 1 - \frac{r}{R_{2,3}} \right)^{1/7}$

Se  $v_{\max_1} = 0,02 \text{ m/s}$  e  $v_{\max_2} = 0,13 \text{ m/s}$ , determinar a velocidade média no tubo de 5 cm de diâmetro. ( $R_1 =$  raio da seção  $A_1$ )



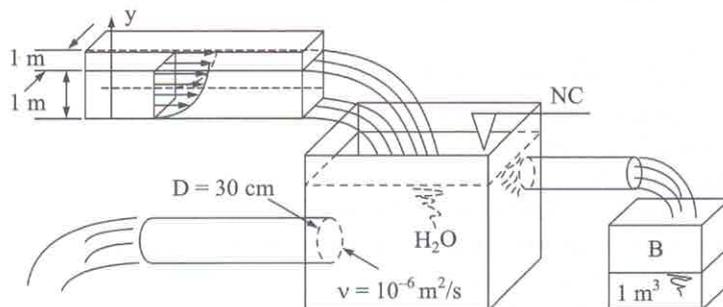
Resp.:  $v_3 = 0,064 \text{ m/s}$

- 3.11 O filtro de admissão de combustível de uma certa máquina é formado por um elemento poroso com forma de tronco de cone. O combustível líquido penetra no filtro com uma vazão de 10 L/s. A distribuição de velocidades na face superior é linear com  $v_{\max} = 0,3 \text{ m/s}$ . Qual é a vazão de combustível que será filtrada pela parede porosa?



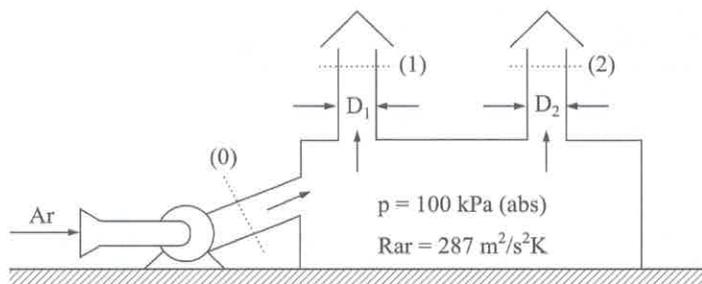
Resp.: 8,8 L/s

- 3.12 O tanque maior da figura abaixo permanece em nível constante. O escoamento na calha tem uma seção transversal quadrada e é bidimensional, obedecendo à equação  $v = 3y^2$ . Sabendo que o tanque (B) tem  $1 \text{ m}^3$  e é totalmente preenchido em 5 segundos e que o conduto circular tem 30 cm de diâmetro, determinar:
- a) a velocidade média na calha quadrada;
  - b) a vazão no conduto circular de 30 cm de diâmetro;
  - c) a velocidade máxima na seção do conduto circular de 30 cm de diâmetro.



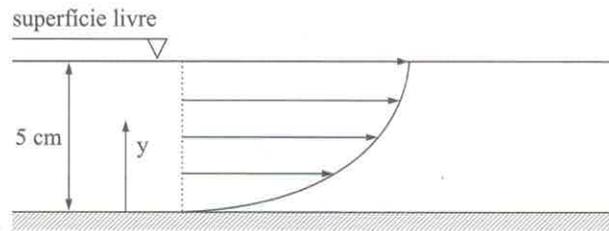
Resp.: a)  $1 \text{ m/s}$ ; b)  $0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ ; c)  $13,86 \text{ m/s}$

- 3.13 O insuflador de ar da figura a seguir gera  $16.200 \text{ m}^3/\text{h}$  na seção (0) com uma velocidade média de  $9,23 \text{ m/s}$ . Foram medidas as temperaturas nas seções (0), (1) e (2), sendo, respectivamente,  $t_0 = 17^\circ \text{C}$ ;  $t_1 = 47^\circ \text{C}$  e  $t_2 = 97^\circ \text{C}$ . Admitindo como imposição do projeto do sistema que o número de Reynolds nas seções (1) e (2) deva ser  $10^5$  e sabendo que diâmetro  $D_2 = 80 \text{ cm}$ ,  $v_{\text{ar}} = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e que a pressão tem variação desprezível no sistema, determinar:
- a) o diâmetro da seção (1);
  - b) as vazões em volume em (1) e (2);
  - c) as vazões em massa em (1) e (2).



Resp. a)  $0,099 \text{ m}$ ; b)  $Q_1 = 0,624 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $Q_2 = 5,021 \text{ m}^3/\text{s}$ ; c)  $Q_{m1} = 0,68 \text{ kg/s}$ ;  $Q_{m2} = 4,73 \text{ kg/s}$

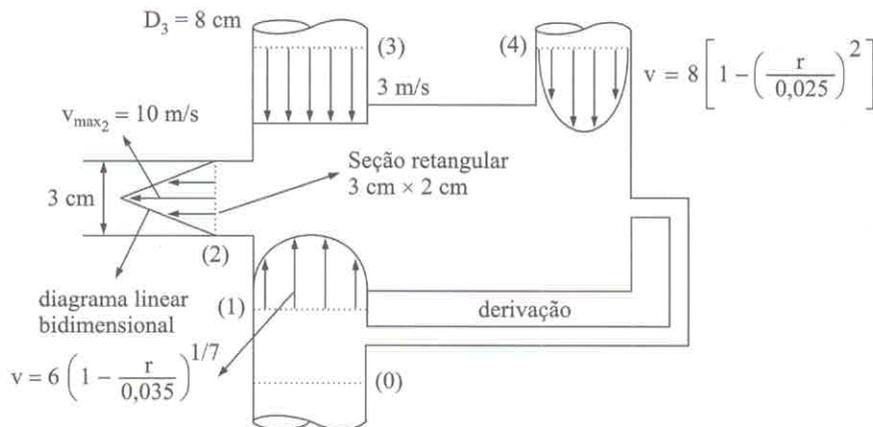
- 3.14 O esquema a seguir corresponde à seção longitudinal de um canal de 25 cm de largura. Admitindo escoamento bidimensional e sendo o diagrama de velocidades dado por  $v = 30y - y^2$  ( $y$  em cm;  $v$  em cm/s), bem como o fluido de peso específico:  $0,9 \text{ N/L}$  e viscosidade cinemática:  $70 \text{ cSt}$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determinar:
- a) o gradiente de velocidade para  $y = 2 \text{ cm}$ ;
  - b) a máxima tensão de cisalhamento na seção ( $\text{N/m}^2$ );
  - c) a velocidade média na seção em cm/s;
  - d) a vazão em massa na seção.



Resp.: a)  $26 \text{ s}^{-2}$ ; b)  $0,189 \text{ N/m}^2$ ; c)  $66,7 \text{ cm/s}$ ; d)  $0,75 \text{ kg/s}$

3.15 No sistema da figura, tem-se um único fluido incompressível de  $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ .

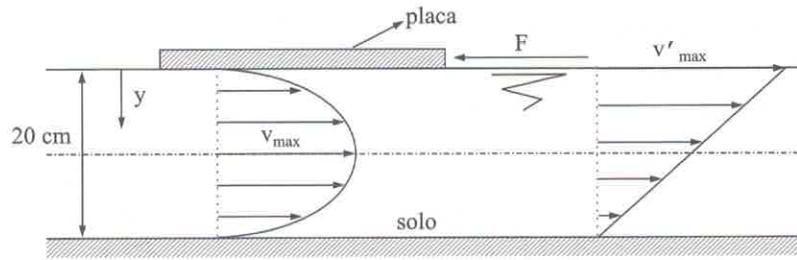
- Qual é o número de Re nas seções (1) e (4)?
- Qual é a velocidade média na seção (2) (m/s)?
- Qual é a vazão em volume nas seções (1) e (4) (L/s)?
- Qual é a vazão em volume na derivação e qual o sentido do escoamento? (Indicar no desenho.)
- Qual é a vazão em peso na seção (0)?
- Qual é a velocidade a 1 cm de distância da parede do tubo (4)?
- Qual é a tensão de cisalhamento na parede do conduto da seção (2)?



Resp.: a)  $Re_1 = 3.430$ ;  $Re_4 = 2.000$ ; b)  $v_{m2} = 5 \text{ m/s}$ ; c)  $Q_1 = 18,9 \text{ L/s}$ ;  $Q_4 = 7,8 \text{ L/s}$ ; d)  $Q_{\text{der}} = 38,8 \text{ L/s}$ ;  
e)  $Q_{G_0} = 199 \text{ N/s}$ ; f)  $v = 5,12 \text{ m/s}$ ; g)  $\tau = 66,7 \text{ N/m}^2$

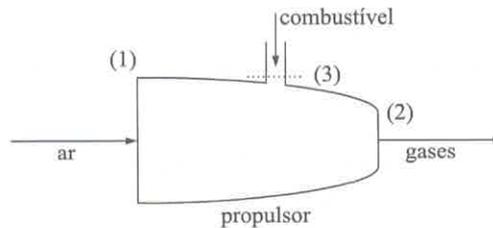
3.16 A placa da figura tem uma área de  $2 \text{ m}^2$  e espessura desprezível. Entre a placa e o solo existe um fluido que escoar formando um diagrama de velocidades bidimensional dado por  $v = 20y v_{\text{max}} (1 - 5y)$ . A viscosidade dinâmica do fluido é  $10^{-2} \text{ N.s/m}^2$  e a velocidade máxima é  $2 \text{ m/s}$ .

- Qual é o gradiente de velocidade junto ao solo?
- Qual é a força necessária para manter a placa em equilíbrio estático?
- Qual é a velocidade média?
- Fora do contato da placa, o diagrama de velocidades é considerado linear bidimensional. Qual é a velocidade máxima?



Resp.: a)  $-40 \text{ s}^{-1}$ ; b)  $0,8 \text{ N}$ ; c)  $1,33 \text{ m/s}$ ; d)  $2,66 \text{ m/s}$

3.17 Um propulsor a jato queima  $1 \text{ kg/s}$  de combustível quando o avião voa à velocidade de  $200 \text{ m/s}$ . Sendo dados  $\rho_{\text{ar}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_g = 0,5 \text{ kg/m}^3$  (na seção 2),  $A_1 = 0,3 \text{ m}^2$  e  $A_2 = 0,2 \text{ m}^2$ , determinar a velocidade dos gases ( $v_g$ ) na seção de saída.



Resp.:  $730 \text{ m/s}$

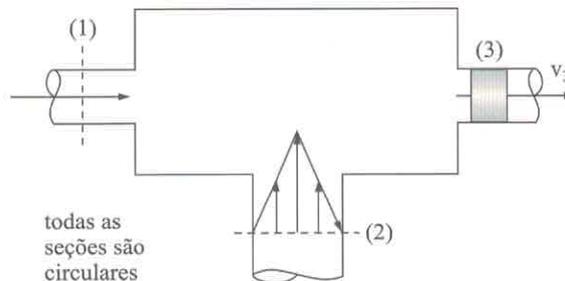
3.18 No sistema da figura,  $A_3 = 0,5 \text{ m}^2$ ,  $\rho_3 = 0,4 \text{ kg/m}^3$  e os fluidos são gases. Dados:

Seção (1):  $v = 4[1 - (r/R)^2]$ ;  $Q_1 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $\rho_1 = 0,6 \text{ kg/m}^3$

Seção (2):  $v = 9(1 - r/0,4)$ ;  $\rho_2 = 1,2 \text{ kg/m}^3$

Determinar:

- a) a velocidade do pistão;
- b) o raio da seção (1);
- c) a mínima viscosidade dinâmica do fluido na seção (1).



Resp.: a)  $15 \text{ m/s}$ ; b)  $0,564 \text{ m}$ ; c)  $6,77 \times 10^{-4} \text{ N.s/m}^2$

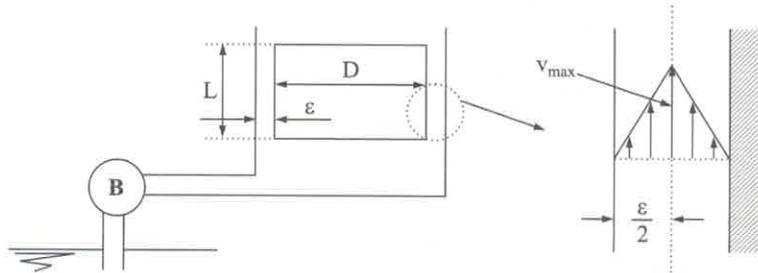
3.19 No sistema da figura, o óleo fornecido pela bomba mantém o pistão parado. O óleo escoa através da folga entre o pistão e o cilindro com uma distribuição linear de velocidades, tendo a máxima velocidade na linha de centro da seção de escoamento. Calcular a vazão de óleo que deve ser fornecida pela bomba adotando a área da coroa circular igual a  $\pi D E$ .

Dados:

Pressão na base do pistão = 50 kPa

$L = 2 \text{ m}$ ;  $D = 20 \text{ cm}$ ; peso do pistão =  $520\pi \text{ N}$

$\mu = 5 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s} / \text{m}^2$ ;  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$



Resp.:  $Q = 1,57 \text{ L/s}$

3.20 O campo de velocidades de um escoamento é dado por  $v_x = 3y$  e  $v_y = 2$ .

a) O movimento é variado ou permanente?

b) Determinar o campo das acelerações.

c) Determinar os módulos da velocidade e aceleração no ponto de coordenadas (3;4).

Resp.: b)  $a_x = 6$ ;  $a_y = 0$       c)  $v = 12,2$ ;  $a = 6$

3.21 Exercício anterior com  $v_x = 0$ ,  $v_y = 3xy$  e ponto de coordenadas (2;2).

Resp.: b)  $a_x = 0$ ;  $a_y = 9x^2y$       c)  $v = 12$ ;  $a = 72$

3.22 Exercício anterior com  $v_x = -2y$ ,  $v_y = 3x$  e ponto de coordenadas (2;3).

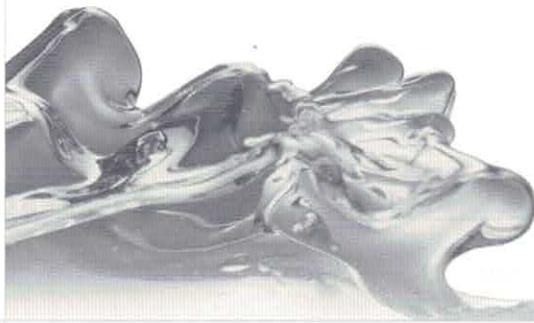
Resp.:  $a_x = -6x$ ;  $a_y = -6y$       c)  $v = 8,5$ ;  $a = 21,6$

3.23 Um escoamento é definido pelo campo de velocidades  $v_x = 2(1 + t)$ ,  $v_y = 3(1 + t)$ ,  $v_z = 4(1 + t)$ . Qual é o módulo da velocidade no ponto (3;1;4) no instante  $t = 2 \text{ s}$ ? Qual é o módulo da aceleração no mesmo ponto e instante?

Resp.:  $v = 16,1$ ;  $a = 5,4$

3.24 O campo de velocidades de um escoamento bidimensional é dado por  $v_x = 3 + 2xy + 4t^2$ ,  $v_y = xy^2 + 3t$ . Determinar os módulos da velocidade e aceleração no ponto (2;1) no instante  $t = 5 \text{ s}$ .

Resp.:  $v = 108$ ;  $a = 368$



# CAPÍTULO 4

## Equação da energia para regime permanente

---

### 4.1 Introdução

No Capítulo 3 foi introduzida a equação da continuidade. Essa equação conclui que, para que a hipótese de regime permanente seja verdadeira, a massa de fluido que flui por uma seção de um tubo de corrente deve ser idêntica àquela que o abandona por outra seção qualquer. Pode-se, então, fazer um balanço das massas ou vazões em massa entre seções de entrada ou saída de um certo escoamento. Com base no fato de que a energia não pode ser criada nem destruída, mas apenas transformada, é possível construir uma equação que permitirá fazer o balanço das energias, da mesma forma como foi feito para as massas, por meio da equação da continuidade.

A equação que permite tal balanço chama-se equação da energia e nos permitirá, associada à equação da continuidade, resolver inúmeros problemas práticos como, por exemplo: determinação da potência de máquinas hidráulicas, determinação de perdas em escoamento, transformação de energia etc.

Essa equação envolve, em geral, uma série de conceitos novos, e os estudantes de Mecânica dos Fluidos costumam ter certa dificuldade para sua assimilação. Por causa disso, neste capítulo será realizada uma inversão que poderá parecer conceitualmente estranha para o conhecedor do assunto, mas que é didaticamente válida. Tal inversão constará da apresentação inicial de um caso particularíssimo que será estendido, aos poucos, para o caso geral em regime permanente.

Essa operação visa a uma familiarização dos leitores com alguns dos termos que ficarão posteriormente diluídos e, portanto, de difícil compreensão dentro da equação geral.

---

### 4.2 Tipos de energias mecânicas associadas a um fluido

a) Energia potencial ( $E_p$ )

É o estado de energia do sistema devido à sua posição no campo da gravidade em relação a um plano horizontal de referência (PHR).

Essa energia é medida pelo potencial de realização de trabalho do sistema.

Seja, por exemplo, um sistema de peso  $G = mg$ , cujo centro de gravidade está a uma cota  $z$  em relação a um PHR (Figura 4.1).

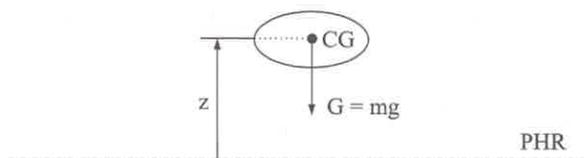


Figura 4.1

Como: Trabalho = Força  $\times$  Deslocamento

Então:  $W = Gz = mgz$

Mas, pelo que foi dito anteriormente,  $E_p = W$ ; logo:

$$E_p = mgz \quad (4.1)$$

Note-se que, na equação, que será introduzida posteriormente, interessará somente a diferença das energias potenciais de um ponto a outro do fluido, de forma que a posição do PHR não alterará a solução dos problemas. Isto é, o PHR é adotado arbitrariamente, conforme a conveniência da solução do problema.

b) Energia cinética ( $E_c$ )

É o estado de energia determinado pelo movimento do fluido. Seja um sistema de massa  $m$  e velocidade  $v$ ; a energia cinética será dada por:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \quad (4.2)$$

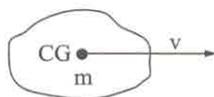


Figura 4.2

c) Energia de pressão ( $E_{pr}$ )

Essa energia corresponde ao trabalho potencial das forças de pressão que atuam no escoamento do fluido.

Seja, por exemplo, o tubo de corrente da Figura 4.3.

Admitindo que a pressão seja uniforme na seção, então a força aplicada pelo fluido externo no fluido do tubo de corrente, na interface de área  $A$ , será  $F = pA$ . No intervalo de tempo  $dt$ , o fluido irá se deslocar de um  $ds$ , sob a ação da força  $F$ , produzindo um trabalho:

$$dW = Fds = pAds = pdV$$

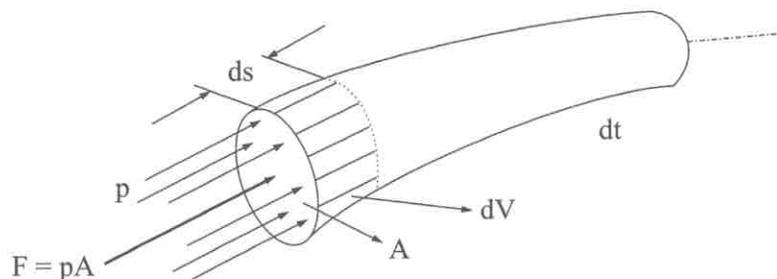


Figura 4.3

Por definição:

$$dW = dE_{pr}$$

e portanto:

$$dE_{pr} = pdV \quad (4.3)$$

ou 
$$E_{pr} = \int_V p dV$$

- d) Energia mecânica total do fluido (E)  
Excluindo-se energias térmicas e levando em conta apenas efeitos mecânicos, a energia total de um sistema de fluido será:

$$E = E_p + E_c + E_{pr} \quad (4.4)$$

ou 
$$E = mgz + \frac{mv^2}{2} + \int_V p dV \quad (4.5)$$

### 4.3 Equação de Bernoulli

Conforme foi citado na introdução, a equação da energia geral será construída aos poucos, partindo-se de uma equação mais simples, válida somente para uma série de hipóteses simplificadoras.

É óbvio que cada hipótese admitida cria um afastamento entre os resultados obtidos pela equação e os observados na prática. A equação de Bernoulli, devido ao grande número de hipóteses simplificadoras, dificilmente poderá produzir resultados compatíveis com a realidade. No entanto, é de importância fundamental, seja conceitualmente, seja como alicerce da equação geral, que será construída pela eliminação gradual das hipóteses da equação de Bernoulli e pela introdução dos termos necessários, para que a equação represente com exatidão os fenômenos naturais.

As hipóteses simplificadoras são:

- regime permanente;
- sem máquina no trecho de escoamento em estudo. Entenda-se por máquina qualquer dispositivo mecânico que forneça ou retire energia do fluido, na forma de trabalho. As que fornecem energia ao fluido serão denominadas 'bombas' e as que extraem energia do fluido, 'turbinas';
- sem perdas por atrito no escoamento do fluido ou fluido ideal;
- propriedades uniformes nas seções;
- fluido incompressível;
- sem trocas de calor.

Pelas hipóteses (b), (c) e (f) exclui-se que no trecho de escoamento em estudo seja fornecida ou retirada energia do fluido.

Seja o tubo de corrente da Figura 4.4, entre as seções (1) e (2).

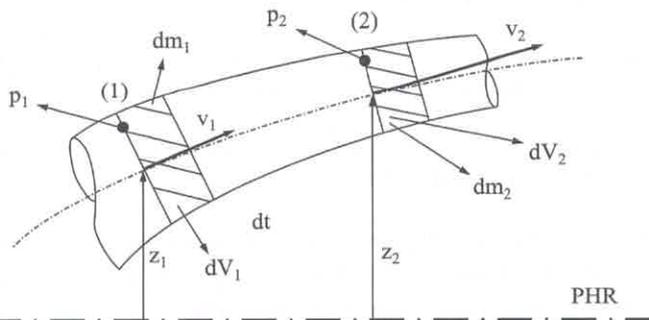


Figura 4.4

Deixando passar um intervalo de tempo  $dt$ , uma massa infinitesimal  $dm_1$  de fluido a montante da seção (1) atravessa-a e penetra no trecho (1)-(2) acrescentando-lhe a energia:

$$dE_1 = dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 v_1^2}{2} + p_1 dV_1$$

Na seção (2), uma massa  $dm_2$  do fluido que pertencia ao trecho (1)-(2) escoou para fora, levando a sua energia:

$$dE_2 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 v_2^2}{2} + p_2 dV_2$$

Como pelas hipóteses (b), (c) e (f) não se fornece nem se retira energia do fluido, para que o regime seja permanente é necessário que no trecho (1)-(2) não haja variação de energia, o que implica obrigatoriamente que:

$$dE_1 = dE_2 \quad \text{ou}$$

$$dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 v_1^2}{2} + p_1 dV_1 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 v_2^2}{2} + p_2 dV_2$$

Como  $\rho = \frac{dm}{dV}$  e portanto  $dV = \frac{dm}{\rho}$ , tem-se:

$$dm_1 g z_1 + \frac{dm_1 v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} dm_1 = dm_2 g z_2 + \frac{dm_2 v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} dm_2$$

Como o fluido é incompressível,  $\rho_1 = \rho_2$  e, como o regime é permanente,  $dm_1 = dm_2$ , portanto:

$$g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

Dividindo a equação por  $g$  e lembrando que  $\gamma = \rho g$ , tem-se:

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (4.6)$$

A Equação 4.6 é a equação de Bernoulli, que permite relacionar cotas, velocidades e pressões entre duas seções do escoamento do fluido. A seguir, será indicado o significado dos termos dessa equação.

$$z = \frac{mgz}{mg} = \frac{E_p}{G} = \text{energia potencial por unidade de peso ou energia potencial de uma partícula de peso unitário}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2gm} = \frac{mv^2}{2G} = \frac{E_c}{G} = \text{energia cinética por unidade de peso ou energia cinética de uma partícula de peso unitário}$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{pV}{\gamma V} = \frac{pV}{G} = \frac{E_{pr}}{G} = \text{energia de pressão por unidade de peso ou energia de pressão da partícula de peso unitário}$$

Note-se, então, que a Equação 4.6 expressa que ao penetrar por (1) uma partícula de peso unitário, à qual estão associadas as energias  $z_1$ ,  $v_1^2/2g$  e  $p_1/\gamma$ , deverá sair por (2) uma partícula de peso unitário à qual estejam associadas as energias  $z_2$ ,  $v_2^2/2g$  e  $p_2/\gamma$ , de forma que a soma delas seja idêntica à soma em (1) para manter a energia constante no volume entre (1) e (2).

Uma observação importante é que, sendo  $z$  uma cota, então será medida em unidade de comprimento (por exemplo, em metros); logo, tanto  $v^2/2g$  como  $p/\gamma$  também serão medidos dessa forma. Não deve o leitor esquecer que, apesar disso, cada uma das parcelas da Equação 4.6 tem o significado de energia por unidade de peso.

Note-se ainda que no item 2.5 do Capítulo 2 a carga de pressão foi definida como sendo  $h = p/\gamma$ . Logo, a energia de pressão por unidade de peso é a própria carga de pressão. Por analogia, serão denominadas:

$z$  = carga potencial

$\frac{v^2}{2g}$  = carga da velocidade ou carga cinética

Observe-se que a palavra 'carga' substitui a expressão 'energia por unidade de peso'.

Fazendo: 
$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$$

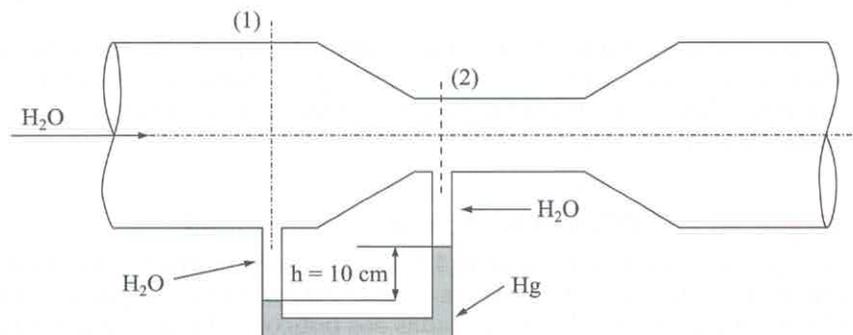
onde:  $H$  = energia total por unidade de peso numa seção ou carga total na seção.  
Com a noção de carga total, a Equação 4.6 poderá ser escrita simbolicamente:

$$H_1 = H_2 \quad (4.7)$$

Essa equação poderá ser enunciada da seguinte forma: *Se, entre duas seções do escoamento, o fluido for incompressível, sem atritos, e o regime permanente, se não houver máquina nem trocas de calor, então as cargas totais se manterão constantes em qualquer seção, não havendo nem ganhos nem perdas de carga.*

### EXEMPLO

Água escoou em regime permanente no Venturi da figura. No trecho considerado, supõem-se as perdas por atrito desprezíveis e as propriedades uniformes nas seções. A área (1) é  $20 \text{ cm}^2$ , enquanto a da garganta (2) é  $10 \text{ cm}^2$ . Um manômetro cujo fluido manométrico é mercúrio ( $\gamma_{\text{Hg}} = 136.000 \text{ N/m}^3$ ) é ligado entre as seções (1) e (2) e indica o desnível mostrado na figura. Pede-se a vazão da água que escoou pelo Venturi. ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10.000 \text{ N/m}^3$ )



### Solução

Note-se que as hipóteses impostas pelo problema o enquadram perfeitamente no uso da equação de Bernoulli. Logo:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

Os centros geométricos das seções (1) e (2) têm a mesma cota  $z$ , qualquer que seja o PHR adotado. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

O segundo membro dessa expressão pode ser determinado pelo manômetro diferencial instalado, mas antes disso é interessante notar que, pela equação da continuidade, sendo  $A_2 < A_1$ , tem-se  $v_2 > v_1$ , e como a energia cinética aumenta de (1) para (2), a energia de pressão deverá diminuir para que a soma seja constante. Essa observação explica o porquê de o manômetro estar desnivelado da esquerda para a direita, já que  $p_1 > p_2$ . Partindo do centro geométrico da seção (1) e desprezando os trechos comuns aos dois ramos do manômetro, a equação manométrica ficará:

$$p_1 + \gamma_{H_2O}h - \gamma_{Hg}h = p_2$$

$$p_1 - p_2 = (\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O})h$$

Logo:  $p_1 - p_2 = (136.000 - 10.000) \times 0,1 = 12.600 \text{ N/m}^2$

ou  $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{12.600}{\gamma} = \frac{12.600}{10.000} = 1,26 \text{ m}$

Ou, adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,

$$v_2^2 - v_1^2 = 25,20 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Como a equação da energia conduz a uma equação com duas incógnitas, haverá necessidade de outra equação que relacione as velocidades, que é a equação da continuidade. Pela equação da continuidade:

$$Q_1 = Q_2$$

ou  $v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \therefore \quad v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{v_2}{2}$

Logo:  $v_2^2 - \frac{v_2^2}{4} = 25,20$

ou  $v_2 = \sqrt{\frac{4 \times 25,20}{3}} = 5,8 \text{ m/s}$

Logo:  $Q = v_2 A_2 = 5,8 \times 10 \times 10^{-4} = 5,8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

ou  $Q = 5,8 \text{ L/s}$

Note-se que o problema foi resolvido com o auxílio da equação da energia (Bernoulli) e da equação da continuidade. Tal fato acontecerá em quase todos os problemas, devendo, portanto, o leitor estar bastante familiarizado com os capítulos 3 e 4 para que não tenha dificuldades na seqüência do estudo.

#### 4.4 Equação da energia e presença de uma máquina

Como foi explicado na Introdução (item 4.1), a equação do item 4.3 será completada gradualmente, eliminando as hipóteses impostas para se chegar à equação geral. Em outras palavras, neste item e nos próximos, serão retiradas aos poucos as hipóteses impostas no item 4.3 que restringem o uso da equação.

Neste item 4.4 serão mantidas todas as hipóteses do item 4.3, mas raciocina-se com a presença de uma máquina atuando entre as seções (1) e (2) do tubo de corrente.

Máquina, para efeito deste estudo, será qualquer dispositivo introduzido no escoamento, o qual forneça ou retire energia dele, na forma de trabalho. A maneira de funcionamento da máquina não interessará por enquanto, importando somente como sua presença afeta as equações 4.6 ou 4.7.

Como, por enquanto, subsiste a hipótese de fluido incompressível, para facilidade de linguagem, será denominada 'bomba' qualquer máquina que forneça energia ao fluido e 'turbina', qualquer máquina que retire energia dele.

Vejam a alteração na equação do item 4.3 ao introduzir uma máquina entre as seções (1) e (2) (Figura 4.5).

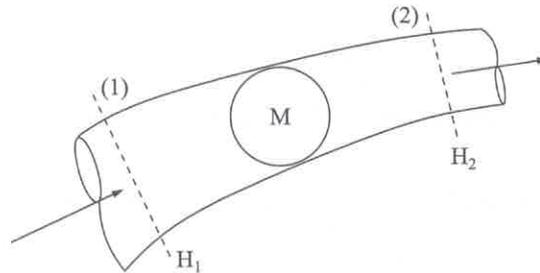


Figura 4.5

Se não houvesse máquina, sabe-se que, válidas as hipóteses do item 4.3, valeria a Equação 4.7

$$H_1 = H_2$$

isto é, a energia por unidade de peso do fluido em (1) é igual à energia por unidade de peso em (2) ou a carga total em (1) é igual à carga total em (2).

Se a máquina for uma bomba, o fluido receberá um acréscimo de energia tal que  $H_2 > H_1$ .

Para restabelecer a igualdade, deverá ser somada ao primeiro membro a energia recebida pela unidade de peso do fluido na máquina.

$$\text{Logo:} \quad H_1 + H_B = H_2 \quad (4.8)$$

A parcela  $H_B$  é chamada 'carga ou altura manométrica da bomba' e representa a energia fornecida à unidade de peso do fluido que passa pela bomba.

Se a máquina for uma turbina,  $H_1 > H_2$ , pois, por definição, a turbina retira energia do fluido. Para restabelecer a igualdade, tem-se:

$$H_1 - H_T = H_2 \quad (4.9)$$

onde  $H_T$  = 'carga ou altura manométrica da turbina' ou energia retirada da unidade de peso do fluido pela turbina.

Como se deseja estabelecer uma equação geral, a carga manométrica da máquina será indicada por  $H_M$  e as equações 4.8 e 4.9 poderão ser escritas de forma única como:

$$H_1 + H_M = H_2 \quad (4.10)$$

sendo:  $H_M = H_B$  se a máquina for uma bomba;

$H_M = -H_T$  se a máquina for uma turbina.

A Equação 4.10 é a que considera a presença de uma máquina no escoamento entre as seções (1) e (2) em estudo. Lembrando os significados de  $H_1$  e  $H_2$ , essa equação é escrita assim:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H_M = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (4.11)$$

$$\text{ou} \quad H_M = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + (z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (4.12)$$

A Equação 4.12 mostra que a presença de uma máquina pode acarretar variações da carga de pressão, da carga potencial e da carga cinética.

## 4.5 Potência da máquina e noção de rendimento

Antes de definir a potência da máquina, será definida a 'potência do fluido'.

Note-se que potência, por definição, é o trabalho por unidade de tempo.

Como o trabalho é uma energia mecânica, podemos generalizar definindo potência como sendo qualquer energia mecânica por unidade de tempo e, daqui para a frente, será representado pelo símbolo  $N$ .

Dessa forma: 
$$N = \frac{\text{energia mecânica}}{\text{tempo}}$$

ou equivalentemente: 
$$N = \frac{\text{energia mecânica}}{\text{peso}} \times \frac{\text{peso}}{\text{tempo}}$$

A energia por unidade de peso já foi definida anteriormente e foi denominada 'carga', e o peso por unidade de tempo é a vazão em peso.

Dessa forma: 
$$N = \text{carga} \times Q_G$$

Pela Equação 3.10: 
$$N = \gamma Q \times \text{carga}$$

Pela Equação 4.13, observa-se que, para calcular a potência referente ao fluido, deve-se multiplicar o peso específico dele pela vazão em volume e pela sua energia por unidade de peso ou carga.

Logo: 
$$N = \gamma Q H \quad (4.13)$$

### EXEMPLO

Calcular a potência do jato de um fluido descarregado no ambiente por um bocal. Dados:  $v_j$  = velocidade do jato;  $A_j$  = área do jato;  $\gamma$  = peso específico do fluido.



Solução

A carga ou a energia do jato por unidade de peso é dada por:

$$H_j = \frac{p_j}{\gamma} + \frac{v_j^2}{2g} + z_j$$

Passando o PHR no centro do bocal,  $z_j = 0$ . Como o jato é descarregado à pressão atmosférica, sua pressão efetiva será nula, isto é,  $p_j = 0$ .

Logo: 
$$H_j = \frac{v_j^2}{2g}$$

o que significa que o jato só tem carga cinética.

Pela Equação 4.13: 
$$N_j = \gamma Q_j H_j$$

ou 
$$N_j = \gamma v_j A_j \frac{v_j^2}{2g}$$

Logo: 
$$N_j = \frac{\gamma A_j v_j^3}{2g} \quad \text{ou} \quad N_j = \frac{\rho A_j v_j^3}{2}$$

No caso da presença de uma máquina, verificou-se que a energia fornecida ou retirada do fluido, por unidade de peso, é indicada por  $H_M$  (carga manométrica). Logo, nesse caso, a potência referente ao fluido será dada por:

$$N = \gamma Q H_M$$

ou, no caso de uma bomba:  $N = \gamma Q H_B$  (4.14)

e no caso de uma turbina:  $N = \gamma Q H_T$  (4.15)

Note-se que, no caso da transmissão de potência, sempre existem perdas e, portanto, a potência recebida ou cedida pelo fluido não coincide com a potência da máquina, que é definida como sendo a potência no seu eixo.

A potência de uma bomba será indicada por  $N_B$  e é ilustrada esquematicamente na Figura 4.6.

A potência  $N_B$ , no caso do desenho, coincidiria com a potência do motor, mas nem sempre o motor é ligado diretamente ao eixo, podendo existir algum elemento de transmissão que provoque perdas.

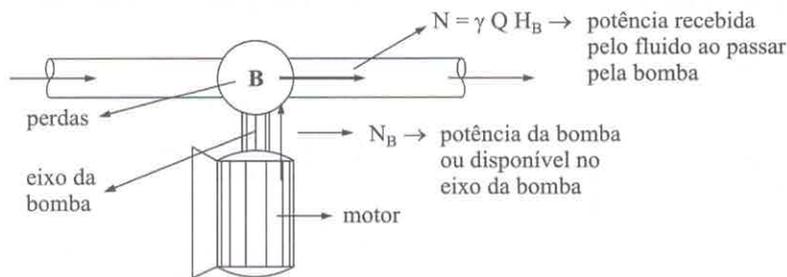


Figura 4.6

Pelo que foi dito anteriormente,  $N < N_B$  devido às perdas na transmissão da potência ao fluido, que se devem principalmente a atritos, mas que aqui não serão analisadas.

Define-se rendimento de uma bomba ( $\eta_B$ ) como a relação entre a potência recebida pelo fluido e a fornecida pelo eixo.

$$\eta_B = \frac{N}{N_B} \quad (4.16)$$

Logo:  $N_B = \frac{N}{\eta_B} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B}$  (4.17)

O caso da turbina é ilustrado pela Figura 4.7.

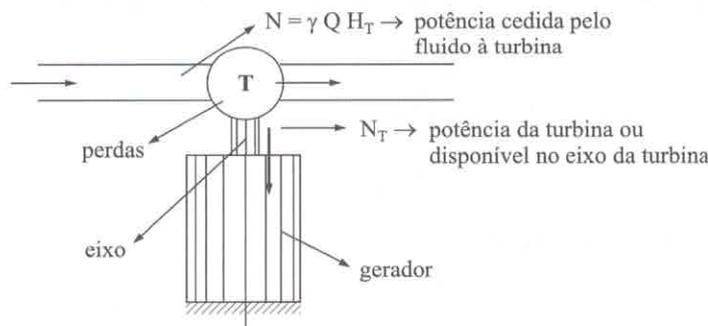


Figura 4.7

Observe-se que, nesse caso, o fluxo de energia é do fluido para a turbina e, portanto,  $N_T < N$ .

Define-se rendimento de uma turbina ( $\eta_T$ ) como a relação entre a potência da turbina e a potência cedida pelo fluido:

$$\eta_T = \frac{N_T}{N}$$

Logo: 
$$N_T = N\eta_T = \gamma Q H_T \eta_T \quad (4.18)$$

As unidades de potência são dadas por unidade de trabalho por unidade de tempo.

SI:  $N \cdot m/s = J/s = W$  (watt)  $\longrightarrow 1 \text{ kgm/s} = 9,8 \text{ W}$

MK\*S:  $\text{kgf} \cdot m/s = \text{kgm/s}$

Outras unidades são o CV (cavalo-vapor) e o HP (*horse power*).

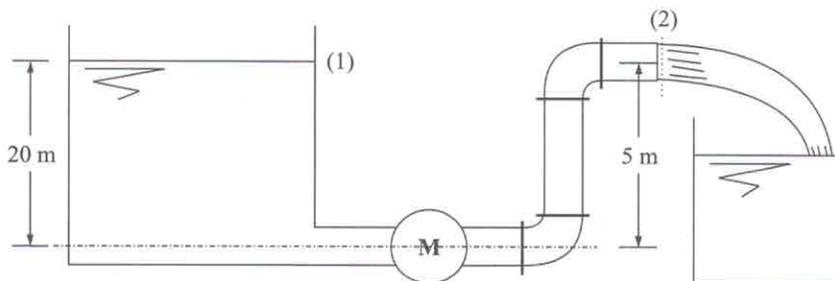
$$1 \text{ CV} = 75 \text{ kgm/s} = 735 \text{ W}$$

$$1 \text{ HP} = 1,014 \text{ CV}$$

### EXEMPLO

O reservatório de grandes dimensões da figura fornece água para o tanque indicado com uma vazão de 10 L/s. Verificar se a máquina instalada é bomba ou turbina e determinar sua potência, se o rendimento é 75%. Supor fluido ideal.

Dados:  $\gamma_{H_2O} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $A_{\text{tubos}} = 10 \text{ cm}^2$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



#### Solução

Como o fluido é considerado ideal, pode-se aplicar a equação de Bernoulli entre as seções (1) e (2), lembrando que entre as duas existe a máquina M. Mesmo que o reservatório da esquerda não seja a nível constante, será adotada a hipótese de regime permanente com a seguinte consideração: o reservatório, sendo de grandes dimensões, levará muito tempo para que seu nível seja alterado sensivelmente pela água descarregada por (2).

Logo, dentro de um certo intervalo de tempo, pode-se considerar que o seu nível é constante, mantendo dessa forma a hipótese de regime permanente. Lembre o leitor que, todas as vezes que se mencionar 'reservatório de grandes dimensões', essa hipótese é válida e, mais que isso, pode-se considerar a velocidade do fluido no nível do reservatório praticamente nula (vide Exercício 3.8 do Capítulo 3). Com essas considerações, pode-se escrever:

$$H_1 + H_M = H_2$$

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1$$

$$H_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

Adotando o PHR na base do reservatório (1), tem-se:

$$z_1 = 20 \text{ m} \quad \text{e} \quad z_2 = 5 \text{ m}$$

A pressão, tanto na seção (1) como na (2), é igual à pressão atmosférica; logo,  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0$  na escala efetiva.

A velocidade na seção (1) é nula pelas considerações feitas ou  $v_1 = 0$ .

Resta determinar  $v_2$ .

$$\text{Mas } v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 10 \text{ m/s}$$

$$H_1 = 0 + 0 + 20 = 20 \text{ m}$$

$$H_2 = 0 + \frac{10^2}{2 \times 10} + 5 = 10 \text{ m}$$

$$\text{Logo: } H_M = H_2 - H_1 = 10 - 20 = -10 \text{ m}$$

Como no sentido do escoamento  $H_M$  é negativo, conclui-se que a máquina é uma turbina, e como  $H_M = -H_T$ , então  $H_T = 10 \text{ m}$ .

Potência fornecida pelo fluido à turbina:

$$N = \gamma Q H_T = 10^4 \times 10 \times 10^{-3} \times 10 \times \frac{1}{1.000} = 1 \text{ kW}$$

Potência da turbina com a noção de rendimento:

$$\eta_T = \frac{N_T}{N} \quad \text{logo: } N_T = N \eta_T = 1 \times 0,75 = 0,75 \text{ kW}$$

Observe que, pela equação de Bernoulli, calcula-se a potência posta em jogo pelo fluido. A potência realmente aproveitada pela turbina é menor, como se pode verificar pelo resultado.

## 4.6 Equação da energia para fluido real

Neste item será retirada a hipótese de fluido ideal; logo, serão considerados os atritos internos no escoamento do fluido. São mantidas as hipóteses de regime permanente, fluido incompressível, propriedades uniformes na seção e sem trocas de calor indúzidas. Esta última significa que não existe uma troca de calor provocada propositalmente; no entanto, ao se considerar os atritos no escoamento do fluido, deve-se imaginar que haverá uma perda de calor do fluido para o ambiente causada pelos próprios atritos. Como será visto a seguir, a construção da equação da energia pode ser realizada sem se falar, explicitamente, dessa perda de calor.

Da equação de Bernoulli sabe-se que, se o fluido fosse perfeito,  $H_1 = H_2$  (Figura 4.8).

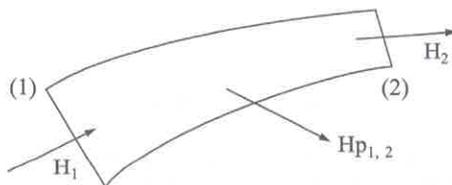


Figura 4.8

Se, no entanto, houver atritos no transporte do fluido, entre as seções (1) e (2) haverá uma dissipação da energia, de forma que  $H_1 > H_2$ .

Querendo restabelecer a igualdade, será necessário somar no segundo membro a energia dissipada no transporte.

$$H_1 = H_2 + H_{p1,2} \quad (4.19)$$

$H_{p1,2}$  = energia perdida entre (1) e (2) por unidade de peso do fluido

Como  $H_{p1,2} = H_1 - H_2$  e como  $H_1$  e  $H_2$  são chamados cargas totais,  $H_{p1,2}$  é denominado 'perda de carga'.

Se for considerada também a presença de uma máquina entre (1) e (2), a equação da energia ficará:

$$H_1 + H_M = H_2 + H_{p1,2} \quad (4.20)$$

ou

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + H_M = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + H_{p1,2} \quad (4.21)$$

Da Equação 4.19 deve-se notar que, no escoamento de um fluido real entre duas seções onde não existe máquina, a energia é sempre decrescente no sentido do escoamento, isto é, a carga total a montante é sempre maior que a de jusante, desde que não haja máquina entre as duas.

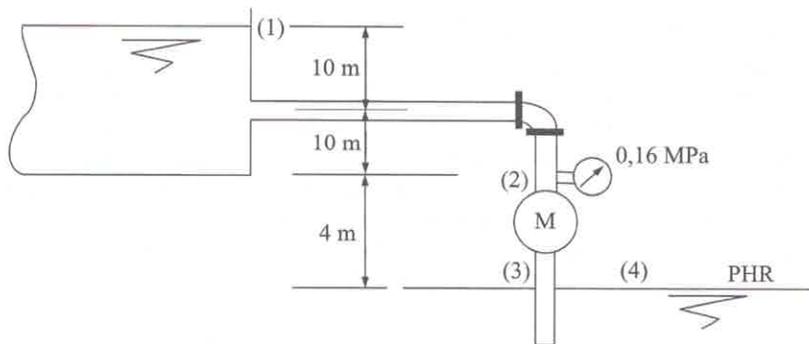
A potência dissipada pelos atritos é facilmente calculável raciocinando da mesma maneira que para o cálculo da potência do fluido. A potência dissipada ou perdida por atrito poderá ser calculada por:

$$N_{diss} = \gamma Q H_{p1,2}$$

## EXEMPLOS

- 1) Na instalação da figura, verificar se a máquina é uma bomba ou uma turbina e determinar sua potência, sabendo que seu rendimento é 75%. Sabe-se que a pressão indicada por um manômetro instalado na seção (2) é 0,16 MPa, a vazão é 10 L/s, a área da seção dos tubos é 10 cm<sup>2</sup> e a perda de carga entre as seções (1) e (4) é 2 m.

Não é dado o sentido do escoamento.  $\gamma_{H_2O} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



### Solução

Deve ser notado, inicialmente, que a seção (4) é o nível do reservatório inferior sem incluir a parte interna do tubo, já que nesta não se conhece a pressão.

Sabe-se que o escoamento acontecerá no sentido das cargas decrescentes, num trecho onde não existe máquina. Para verificar o sentido, serão calculadas as cargas nas seções (1) e (2).

$$H_1 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = 0 + 0 + 24 = 24 \text{ m}$$

$$H_2 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 10 \text{ m/s}$$

$$H_2 = \frac{0,16 \times 10^6}{10^4} + \frac{10^2}{2 \times 10} + 4 = 25 \text{ m}$$

Como  $H_2 > H_1$ , conclui-se que o escoamento terá o sentido de (2) para (1) ou de baixo para cima, sendo a máquina, obviamente, uma bomba.

Aplique-se agora a equação da energia entre as seções (4) e (1), que compreendem a bomba. Lembrar que a equação deve ser escrita no sentido do escoamento.

$$H_4 + H_B = H_1 + H_{p4,1}$$

$$H_4 = \frac{P_4}{\gamma} + \frac{v_4^2}{2g} + z_4 = 0$$

$$H_1 = 24 \text{ m (já calculado)}$$

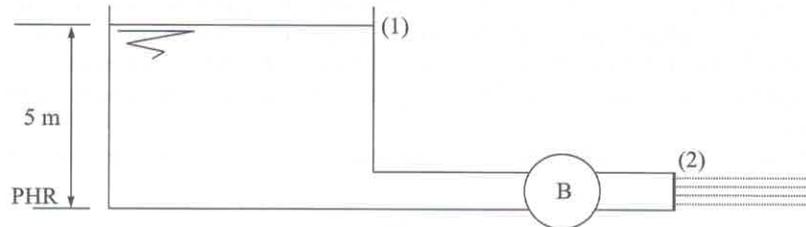
$$H_{p1,4} = 2 \text{ m}$$

Logo:  $H_B = H_1 - H_4 + H_{p1,4} = 24 - 0 + 2 = 26 \text{ m} > 0$

Confirma-se que a máquina é uma bomba, já que a carga manométrica resultou positiva.

$$N_B = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} = \frac{10^4 \times 10 \times 10^{-3} \times 26}{0,75} \times \frac{1}{1.000} = 3,47 \text{ kW}$$

- 2) Na instalação da figura, a máquina é uma bomba e o fluido é água. A bomba tem uma potência de 5 kW e seu rendimento é 80%. A água é descarregada à atmosfera com uma velocidade de 5 m/s pelo tubo cuja área da seção é 10 cm<sup>2</sup>. Determinar a perda de carga do fluido entre (1) e (2) e a potência dissipada ao longo da tubulação.  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Solução

Temos

$$H_1 + H_B = H_2 + H_{p1,2}$$

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = 0 + 0 + 5 = 5 \text{ m}$$

$$H_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \frac{5^2}{2 \times 10} + 0 + 0 = 1,25 \text{ m}$$

Com

$$N_B = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} \rightarrow H_B = \frac{\eta_B N_B}{\gamma Q} = \frac{\eta_B N_B}{\gamma v A}$$

$$H_B = \frac{0,8 \times 5 \times 10^3}{10^4 \times 5 \times 10 \times 10^{-4}} = 80 \text{ m}$$

$$H_{p1,2} = H_1 - H_2 + H_B = 5 - 1,25 + 80$$

$$H_{p1,2} = 83,75 \text{ m}$$

$$N_{diss,1,2} = \gamma Q H_{p1,2} = 10^4 \times 5 \times 10 \times 10^{-4} \times 83,75 \times \frac{1}{1.000} = 4,19 \text{ kW}$$

## 4.7 Diagrama de velocidades não-uniforme na seção

Até agora, uma das hipóteses impostas foi referente a escoamento uniforme; entretanto, devido ao princípio da aderência, o diagrama de velocidades não será uniforme na seção.

Será verificado que esse fato causa uma alteração no termo  $\frac{v^2}{2g}$  da equação da energia, que foi obtido com a hipótese de escoamento uniforme na seção.

Obviamente, se o diagrama de velocidades não for uniforme, existirá uma velocidade distinta em cada ponto da seção (Figura 4.9).

O termo  $v^2/2g$  não terá mais significado, já que na seção em estudo existem infinitas velocidades diferentes.

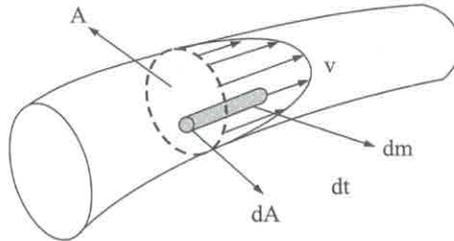


Figura 4.9

É possível utilizar a idéia de velocidade média na seção definida no Capítulo 3. Porém, será verificado a seguir que o termo da energia cinética, escrito com a velocidade média, necessitará de um coeficiente de correção. Para isso, 'fluxo da energia cinética' ( $C$ ) será definido como sendo a energia cinética que atravessa uma seção do escoamento por unidade de tempo.

Na Figura 4.9 será calculada a energia cinética que, no intervalo de tempo  $dt$ , atravessa um  $dA$  da seção de área  $A$ .

$$dE_c = \frac{dmv^2}{2}$$

Logo, o fluxo da energia cinética através do  $dA$  será:

$$dC = \frac{dmv^2}{2dt}$$

Mas  $dm/dt$  é a vazão em massa através do  $dA$ . Logo:

$$\frac{dm}{dt} = dQ_m = \rho dQ = \rho v dA$$

e, portanto,

$$dC = \rho v dA \frac{v^2}{2}$$

ou

$$dC = \frac{\rho v^3}{2} dA \quad (4.22)$$

Para obter o fluxo da energia através de toda a área  $A$ , deve-se integrar a Equação 4.22:

$$C = \int \frac{\rho v^3}{2} dA$$

Adotando a velocidade média na seção e supondo  $\rho = c^{te}$  em seus pontos, pode ser verificado que:

$$C = \int \frac{\rho v^3}{2} dA \neq \frac{\rho v_m^3 A}{2}$$

É necessário, portanto, que se introduza um coeficiente de correção para provocar a igualdade das expressões. Logo:

$$C = \int \frac{\rho v^3}{2} dA = \alpha \frac{\rho v_m^3 A}{2} \quad (4.23)$$

onde  $\alpha$ , denominado 'coeficiente da energia cinética', é o fator que provoca a igualdade das duas expressões e pode ser determinado pela Equação 4.23:

$$\alpha = \frac{2}{\rho v_m^3 A} \int \frac{\rho v^3}{2} dA$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{v}{v_m} \right)^3 dA \quad (4.24)$$

Tendo a definição de  $\alpha$ , o fluxo da energia cinética pode ser escrito:

$$C = \alpha \frac{\rho v_m^3 A}{2} \quad (4.25)$$

Mas  $C = \frac{\text{energia cinética}}{\text{tempo}}$  e o termo da equação da energia corresponde à energia cinética por unidade de peso. Logo:

$$\frac{\text{energia cinética}}{\text{peso}} = \frac{\text{energia cinética}}{\text{peso}} \times \frac{\text{tempo}}{\text{tempo}} = \frac{\text{energia cinética}}{\frac{\text{peso}}{\text{tempo}}}$$

Lembrando que  $\frac{\text{Peso}}{\text{Tempo}} = Q_G$  ou vazão em peso, obtém-se:

$$\frac{\text{energia cinética}}{\text{peso}} = \frac{C}{Q_G} = \frac{\alpha \frac{\rho v_m^3 A}{2}}{\rho g v_m A} = \alpha \frac{v_m^2}{2g}$$

Logo, a Equação 4.21 deverá ser escrita:

$$\alpha_1 \frac{v_{m1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + H_M = \alpha_2 \frac{v_{m2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{p1,2} \quad (4.26)$$

ou simplesmente:

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + H_M = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{p1,2} \quad (4.27)$$

lembrando que a presença de  $\alpha$  implica que  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades médias nas seções (1) e (2) do escoamento.

O coeficiente  $\alpha$  é função somente do diagrama de velocidades e será tanto maior que a unidade quanto mais este último se afastar do diagrama uniforme.

Em tubos de seção circular, sendo o escoamento laminar, vale o diagrama  $v = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$

e, nesse caso,  $\alpha = 2$ , e se o escoamento for turbulento,  $v = v_{\max} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7}$ , sendo  $\alpha \approx 1$ . Nessas

condições, sempre que  $Re > 2.400$ , em tubos, pode-se adotar a equação da energia na forma apresentada na Equação 4.21, em vez da apresentada na Equação 4.27, já que  $\alpha \approx 1$ . Note-se que este é o caso mais comum na prática da engenharia. (Vide exercícios 4.23 e 4.24, associados aos exercícios 3.1 e 3.2, respectivamente.)

A Equação 4.27 é a equação válida, sem nenhuma restrição, quando o regime é permanente, o fluido é incompressível e sem trocas de calor ou fenômenos térmicos.

Trata-se, portanto, da equação de uso mais freqüente nas aplicações que envolvem fluidos incompressíveis, isto é, líquidos ou até gases, desde que a variação da massa específica ao longo do escoamento seja desprezível.

#### 4.8 Equação da energia para diversas entradas e saídas e escoamento em regime permanente de um fluido incompressível, sem trocas de calor

Ao longo de todo o capítulo, raciocinou-se com apenas uma entrada e uma saída ou tubo de corrente. Com a base dada, o próprio leitor poderia verificar as alterações na equação para um caso em que o número de entradas e saídas fosse maior. No entanto, será aqui determinada essa equação, de grande utilidade em muitos problemas.

Mantidas as hipóteses da equação de Bernoulli (item 4.3), na Figura 4.10, a energia que penetra no sistema pelas entradas deve coincidir com a que o abandona pelas saídas no mesmo intervalo de tempo  $t$ , para que o regime seja permanente.

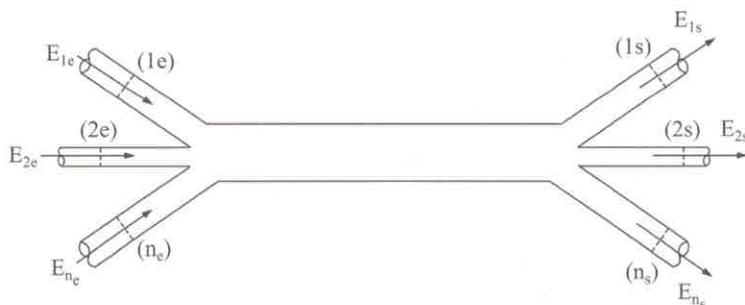


Figura 4.10

Logo: 
$$\sum_e E = \sum_s E \quad (4.28)$$

onde: e = entradas

s = saídas

Dividindo a Equação 4.28 pelo intervalo de tempo em que as energias que entraram e saíram foram computadas, obtém-se

$$\sum_e E / t = \sum_s E / t$$

e lembrando que a energia do fluido por unidade de tempo representa a potência do fluido, teremos:

$$\sum_e N = \sum_s N$$

ou

$$\sum_e \gamma QH = \sum_s \gamma QH \quad (4.29)$$

onde  $H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z$  em cada seção.

No caso da presença de máquina e de perdas por atrito, teremos, pela Figura 4.11:

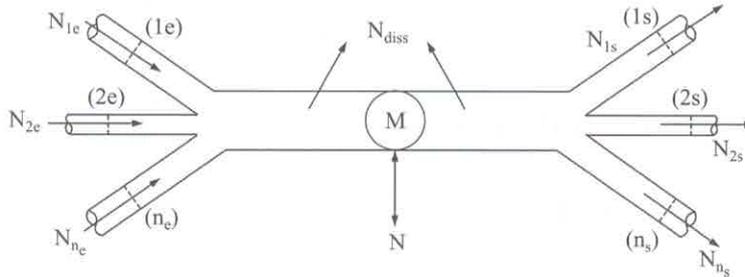


Figura 4.11

$$\sum_e \gamma QH + N = \sum_s \gamma QH + N_{diss} \quad (4.30)$$

onde  $N$  será positivo ou negativo, dependendo de a máquina ser bomba ou turbina, e  $N = \gamma QH_M$ , conforme foi visto anteriormente.

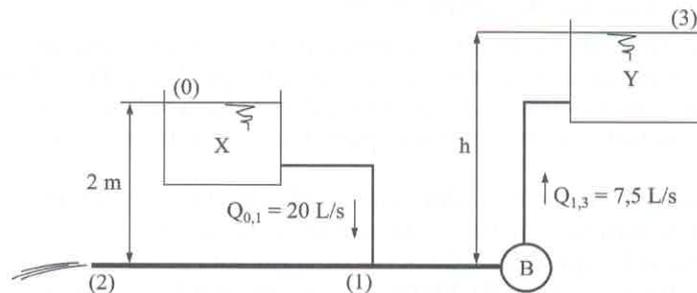
$$N_{diss} = \sum \gamma QH_p \quad (4.31)$$

onde, na somatória,  $Q$  e  $H_p$  referem-se a cada trecho do escoamento.

### EXEMPLO

No sistema da figura, os reservatórios são de grandes dimensões. O reservatório X alimenta o sistema com 20 L/s e o reservatório Y é alimentado pelo sistema com 7,5 L/s. A potência da bomba é 2 kW e o seu rendimento, 80%. Todas as tubulações têm 62 mm de diâmetro e as perdas de carga são:  $H_{p0,1} = 2$  m;  $H_{p1,2} = 1$  m e  $H_{p1,3} = 4$  m. O fluido é água ( $\gamma = 10^4$  N/m<sup>3</sup>). Pede-se:

- a potência dissipada na instalação;
- a cota da seção (3) em relação ao centro da bomba.



Solução

a) Pela equação da continuidade:  $\sum_e Q = \sum_s Q$

Logo:  $Q_{0,1} = Q_{1,2} = Q_{1,3}$

$$20 = Q_{1,2} + 7,5 \quad Q_{1,2} = 12,5 \text{ L/s}$$

$$N_{diss} = \gamma Q_{0,1} H_{p0,1} + \gamma Q_{1,2} H_{p1,2} + \gamma Q_{1,3} H_{p1,3}$$

$$N_{diss} = 10^4 \times (20 \times 10^{-3} \times 2 + 12,5 \times 10^{-3} \times 1 + 7,5 \times 10^{-3} \times 4) \frac{1}{10^3} = 0,825 \text{ kW}$$

$$b) \sum_c \gamma QH + N = \sum_s \gamma QH + N_{\text{diss}}$$

$$\gamma Q_{0,1} H_0 + N = \gamma Q_{1,2} H_2 + \gamma Q_{1,3} H_3 + N_{\text{diss}}$$

$$H_0 = \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0$$

$$\text{onde: } v_0 = 0$$

$$p_0 = 0$$

$$z_0 = 2 \text{ m, adotando-se o PHR no nível da bomba.}$$

$$\text{Logo, } H_0 = 2 \text{ m.}$$

$$H_2 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad \text{onde} \quad z_2 = 0, \quad p_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{4Q_2}{\pi D^2} = \frac{4 \times 12,5 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,062^2} = 4,14 \text{ m/s}$$

$$\text{e, supondo } \alpha_2 = 1,$$

$$H_2 = \frac{4,14^2}{20} = 0,86 \text{ m}$$

$$H_3 = \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3$$

$$\text{onde: } v_3 = 0, \quad p_3 = 0, \quad z_3 = h$$

$$N = N_B \eta_B = 2 \times 0,8 = 1,6 \text{ kW}$$

Portanto, na equação da energia:

$$10^4 \times 20 \times 10^{-3} \times 2 + 1,6 \times 10^3 = 10^4 \times 12,5 \times 10^{-3} \times 0,86 + 10^4 \times 7,5 \times 10^{-3} \times h + 0,825 \times 10^3$$

$$\text{e finalmente } h = 14,7 \text{ m}$$

## 4.9 Interpretação da perda de carga

A existência de atrito no escoamento do fluido provoca uma dissipação de energia que, por unidade de peso, é computada matematicamente na Equação 4.27 pela perda de carga  $H_{p_{1,2}}$ .

Note-se que a idéia de perda de carga é introduzida para balancear a equação, sem o objetivo de procurar explicar o paradeiro da energia que vai sendo perdida pelo fluido ao longo do seu escoamento.

Observe-se também que, a essa altura, ainda são vigentes as hipóteses de fluido incompressível ( $\rho = c^{te}$ ) e da ausência de trocas induzidas de calor.

Conclui-se, portanto, que a idéia de perda de carga está ligada a essas hipóteses e que, se elas falharem, esse termo da equação da energia deverá ser introduzido e interpretado de outra maneira.

É evidente que, entrando em detalhes, a perda de carga, provocada pelo efeito mecânico do atrito no escoamento do fluido, acabará recaindo em efeitos térmicos, que deverão ser levados em consideração na sua interpretação.

Para facilitar a compreensão, vamos observar dois casos isolados que na prática acontecem simultaneamente. Vamos supor, em primeiro lugar, que o escoamento fosse isotérmico (Figura 4.12).

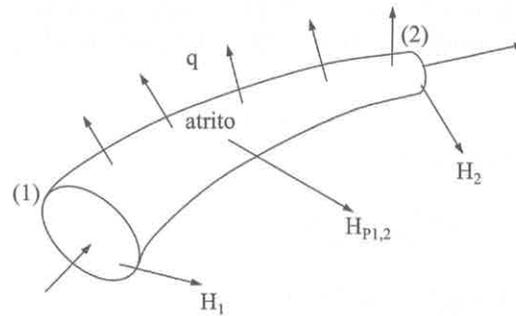


Figura 4.12

Nesse caso, o atrito provoca uma tendência de aquecimento do fluido; mas, diante da hipótese, como  $T = c^{te}$  ao longo do escoamento, deve-se supor que haverá uma troca de calor entre o fluido e o meio. Como o calor é uma energia que flui, o sentido do seu fluxo será indicado por um sinal. Considera-se o calor positivo quando é fornecido ao sistema e negativo em caso contrário.

Indicando por  $q$  o calor trocado por unidade de peso, tem-se:

$q > 0$  quando fornecido ao fluido;

$q < 0$  quando retirado do fluido.

É óbvio que o calor gerado pelos atritos é sempre perdido pelo fluido e, portanto, pela nossa convenção, será sempre negativo.

Logo, como a perda de carga é um termo positivo, tem-se nesse caso:

$$H_{p1,2} = -q \quad (4.32)$$

Vamos supor agora que o escoamento fosse adiabático, isto é, sem trocas de calor. Nesse caso, como não é trocado calor entre as seções (1) e (2), haveria ao longo do escoamento um aquecimento provocado pelo atrito (Figura 4.13).

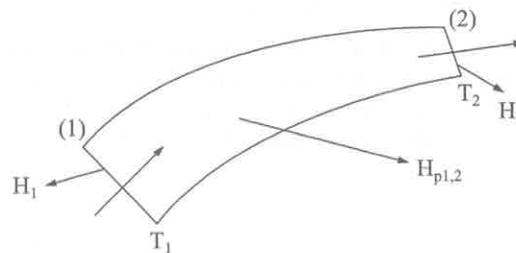


Figura 4.13

O aumento da temperatura do fluido denota um aumento de sua energia térmica ou interna. Indicaremos essa energia por unidade de peso por  $i$  e, na ausência de outros fenômenos,  $i$  será proporcional a  $T$ . Logo:

$$i = \frac{c_e}{g} T \quad (4.33)$$

onde  $c_e$  = calor específico do fluido = calor necessário para que a unidade de massa do fluido sofra uma variação de temperatura de um grau.

A aceleração da gravidade  $g$  aparece pelo fato de  $c_e$  ser definido por unidade de massa e  $i$  por unidade de peso.

Como, devido ao atrito,  $T_2 > T_1$ , então  $i_2 > i_1$ , denotando o aumento de energia térmica do fluido.

Pelo princípio da conservação da energia, o aumento de energia térmica do fluido deverá ser acompanhado por uma diminuição da energia mecânica, cujo total é representado pela carga  $H$ ; logo, se

$$i_2 > i_1 \Rightarrow H_2 < H_1$$

Na realidade, deve ser lembrado que:

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$

Assim,  $z_2 - z_1$  é função apenas das cotas das seções (1) e (2).

Por outro lado,  $v_1 = \frac{Q_1}{A_1}$  e  $v_2 = \frac{Q_2}{A_2}$ , pois, por se tratar de um fluido incompressível,  $Q_1 = Q_2$ , e, portanto,  $v_1$  e  $v_2$  são funções geométricas das áreas das seções. Conclui-se, assim, que o aumento da energia térmica só pode ser realizado à custa de uma diminuição correspondente da energia de pressão.

Logo, nesse caso, a perda de carga deverá ser interpretada pelo aumento da energia térmica ou por uma perda de energia de pressão, reduzindo-se, portanto, o conteúdo de energia mecânica do fluido. Nesse caso:

$$H_{p1,2} = i_2 - i_1 = \frac{c_e}{g}(T_2 - T_1) \quad (4.34)$$

Logo, quando se interpretam apenas os fenômenos mecânicos do escoamento de um fluido incompressível, o aumento da energia térmica, provocado pelos atritos, é incluído nas perdas mecânicas, interpretadas globalmente pela 'perda de carga'.

Em regime permanente, o escoamento não será nem adiabático nem isotérmico e haverá uma simultaneidade de trocas de calor e variação de temperatura entre uma seção e outra, devido aos atritos, de forma que:

$$H_{p1,2} = (i_2 - i_1) - q \quad (4.35)$$

Apesar da coerência da Equação 4.35, não será possível obter a perda de carga numericamente, pela medida de seus efeitos térmicos, devido ao fato de que estes, sendo muito pequenos, são difíceis de avaliar. Logo, a Equação 4.35 deve ser interpretada apenas conceitualmente, sem o objetivo de uso para o cálculo da perda de carga, que será mostrado por outros meios no Capítulo 7.

### EXEMPLO

Água esco numa tubulação horizontal de 5 cm de diâmetro com uma vazão de 5 L/s. A perda de carga num trecho de 10 m é 2 m.

- Supondo o escoamento adiabático, qual seria a variação de temperatura entre as duas seções?
- Supondo o escoamento isotérmico, qual seria o fluxo de calor para o ambiente?
- Qual é a queda de pressão entre as duas seções?

Dados:  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $c_e = 4,186 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ ;

Solução

$$a) H_{p1,2} = \frac{c_e}{g}(T_2 - T_1)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{gH_{p1,2}}{c_e}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{10 \times 2}{4,186 \times 10^3}$$

$$\frac{\text{m} / \text{s}^2 \times \text{m}}{\text{J} / \text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = \frac{\text{m}^2 / \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m} / \text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = ^\circ\text{C}$$

já que  $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$ .

$$\text{Logo: } T_2 - T_1 = 0,0048^\circ\text{C}$$

Esse resultado mostra que seria impossível detectar a perda de carga pela medida da variação da temperatura do fluido.

$$\text{b) } H_{p_{1,2}} = -q \quad q = -2 \text{ m}$$

O sinal negativo é consequência do fato de que o calor é perdido pelo fluido. Fluxo de calor é o calor trocado por unidade de tempo.

Mas  $q = \text{calor/peso}$

$$\text{Logo: } \text{Fluxo de calor} = \frac{\text{calor}}{\text{tempo}} = \frac{\text{calor}}{\text{peso}} \times \frac{\text{peso}}{\text{tempo}}$$

$$\text{ou } \text{Fluxo de calor} = q \times Q_G = q\gamma Q$$

$$\text{portanto: Fluxo de calor} = -2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3} \left( \text{m} \times \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) = \frac{J}{s} = W$$

$$\text{Fluxo de calor} = -100 \text{ W}$$

$$\text{c) } H_{p_{1,2}} = H_2 - H_1 = \left( \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left( \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right)$$

Como o tubo é horizontal,  $z_2 - z_1 = 0$ .

$$\text{Como tem seção constante, } \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 0$$

$$\text{Logo: } H_{p_{1,2}} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} \quad P_2 - P_1 = \gamma H_{p_{1,2}}$$

$$\text{ou } p_2 - p_1 = 10^4 \times 2 = 20 \text{ kPa}$$

## 4.10 Equação da energia geral para regime permanente

A Equação 4.27 só é válida se o fluido for incompressível e sem trocas induzidas de calor. Note-se que a troca de calor devida aos atritos é considerada natural e não induzida, pelo que foi exposto no item 4.9.

A Equação 4.27 é, portanto, válida para líquidos, mas pode ser válida também para gases, desde que no seu escoamento as variações da densidade sejam desprezíveis ( $\rho \cong c^{te}$ ).

Não será aqui justificado, mas pode-se verificar que a hipótese de fluido incompressível pode ser mantida, desde que o número de Mach do fluido seja menor que 0,2.

Define-se número de Mach ( $\mathcal{M}$ ) como sendo a relação entre a velocidade do fluido ( $v$ ) e a velocidade do som ( $c$ ) numa certa seção do escoamento. Logo:  $\mathcal{M} = \frac{v}{c}$ .

Dessa forma, sempre que  $\frac{v}{c} < 0,2$ , é possível utilizar as equações válidas para fluidos incompressíveis, como, por exemplo, as equações 4.27 e 3.13.

Quando o fluido for compressível e houver trocas induzidas de calor, não será mais possível ignorar as energias térmicas, que passam a desempenhar um papel importante na interpretação dos fenômenos. Por outro lado, a existência de troca de calor induzida e a variação da energia térmica causada por essa troca fazem com que não seja mais possível observar a perda de carga, já que no global é causadora também de variação de energia interna e de troca de calor. Em outras palavras, nessas condições:

$$H_{p_{1,2}} \neq (i_2 - i_1) - q$$

Por causa disso, na equação da energia, válida para fluidos compressíveis e com efeitos térmicos, o balanço das energias deve ser feito considerando a variação da energia térmica e o calor, sem destacar a perda de carga que, de certa forma, torna-se irreconhecível ou, em outras palavras, fica englobada nos efeitos térmicos.

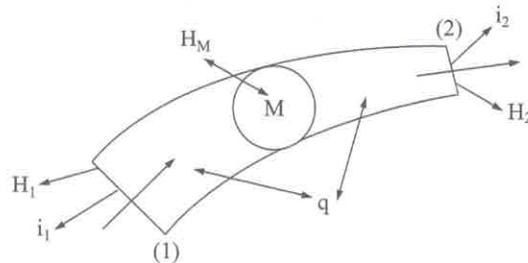


Figura 4.14

Logo: 
$$H_1 + i_1 + H_m + q = H_2 + i_2 \quad (4.36)$$

Note-se que  $H_m$  e  $q$  podem ser positivos ou negativos, dependendo de serem fornecidos ou retirados do fluido.

Escrita por extenso, a Equação 4.36 fica:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + i_1 + H_m + q = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + i_2 \quad (4.37)$$

ou 
$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + H_m = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + i_2 - i_1 - q \quad (4.38)$$

Como já foi dito anteriormente, no caso de fluidos compressíveis, com troca de calor:

$$i_2 - i_1 - q \neq H_{p1,2}$$

e no caso de fluidos incompressíveis, sem troca de calor:

$$i_2 - i_1 - q = H_{p1,2}$$

recaindo-se na Equação 4.27.

Na Equação 4.38 pode-se ainda fazer  $h = \frac{p}{\gamma} + i$

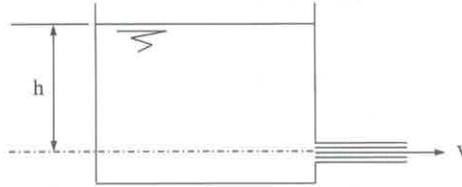
onde  $h$  = entalpia por unidade de peso e se pode escrever:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + z_1 + h_1 + H_m + q = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + z_2 + h_2 \quad (4.39)$$

que nada mais é do que a primeira lei da termodinâmica para sistema aberto ou volume de controle.

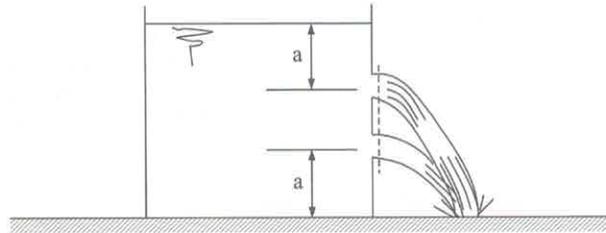
## EXERCÍCIOS

- 4.1 Determinar a velocidade do jato do líquido no orifício do tanque de grandes dimensões da figura. Considerar fluido ideal.

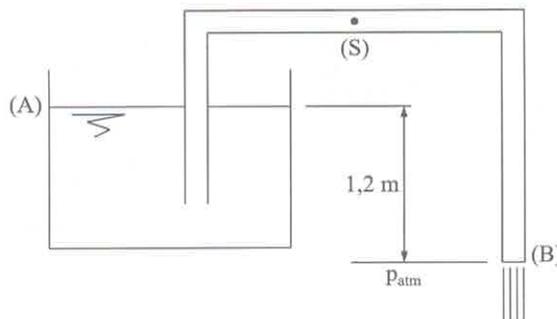


Resp.:  $v = \sqrt{2gh}$

- 4.2 Supondo fluido ideal, mostrar que os jatos de dois orifícios na parede de um tanque interceptam-se num mesmo ponto sobre um plano, que passa pela base do tanque, se o nível do líquido acima do orifício superior é igual à altura do orifício inferior acima da base.

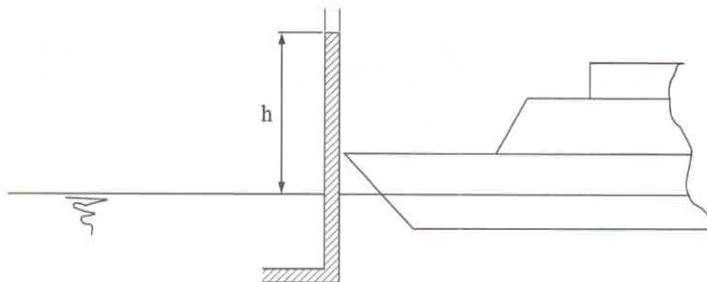


- 4.3 A pressão no ponto S do sifão da figura não deve cair abaixo de 25 kPa (abs). Desprezando as perdas, determinar:
- a velocidade do fluido;
  - a máxima altura do ponto S em relação ao ponto (A);
- $P_{atm} = 100 \text{ kPa}$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$



Resp.: a) 4,9 m/s; b)  $z = 6,3 \text{ m}$

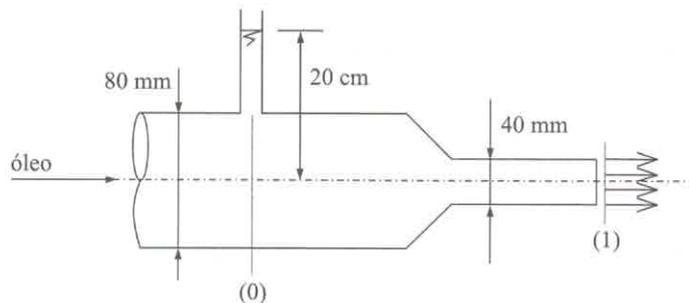
- 4.4 Um tubo de Pitot é preso num barco que se desloca a 45 km/h. Qual será a altura  $h$  alcançada pela água no ramo vertical?



Resp.:  $h = 7,8 \text{ m}$

- 4.5 Quais são as vazões de óleo em massa e em peso no tubo convergente da figura, para elevar uma coluna de 20 cm de óleo no ponto (0)?

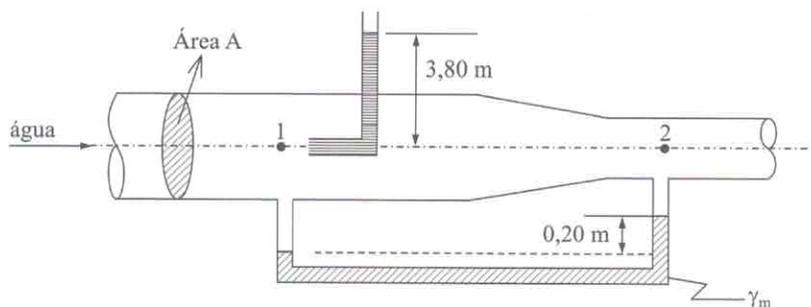
Dados: desprezar as perdas;  $\gamma_{\text{óleo}} = 8.000 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$



Resp.:  $Q_m = 2,1 \text{ kg/s}$ ;  $Q_G = 21 \text{ N/s}$

- 4.6 Dado o dispositivo da figura, calcular a vazão do escoamento da água no conduto.

Dados:  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_m = 6 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $p_2 = 20 \text{ kPa}$ ;  $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Desprezar as perdas e considerar o diagrama de velocidades uniforme.

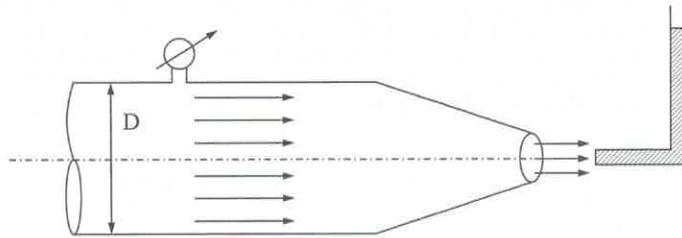


Resp.:  $Q = 40 \text{ L/s}$

- 4.7 Na extremidade de uma tubulação de diâmetro  $D$ , acha-se instalado um bocal que lança um jato de água na atmosfera com diâmetro de 2 cm. O manômetro metálico registra uma pressão de 20 kPa e a água sobe no tubo de Pitot até a altura de 2,5 m. Nessas condições, determinar:

- a vazão em peso do escoamento;
- o diâmetro  $D$  do tubo, admitindo escoamento permanente e sem atrito.

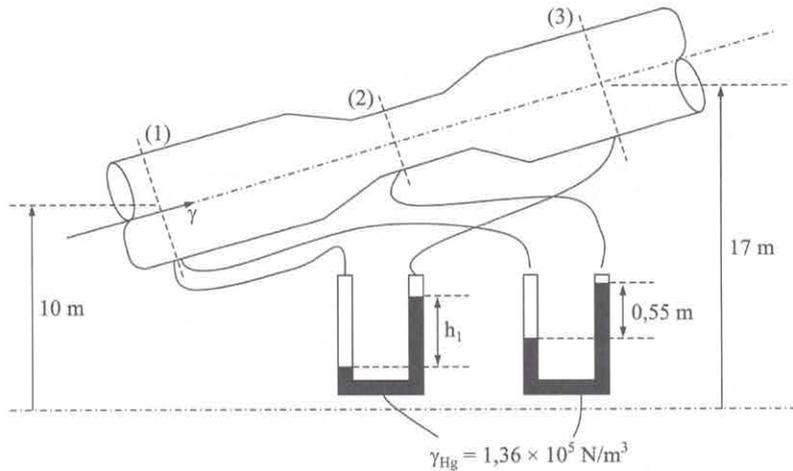
$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \text{ N/L}$



Resp.: a) 22,3 N/s; b)  $D = 3$  cm

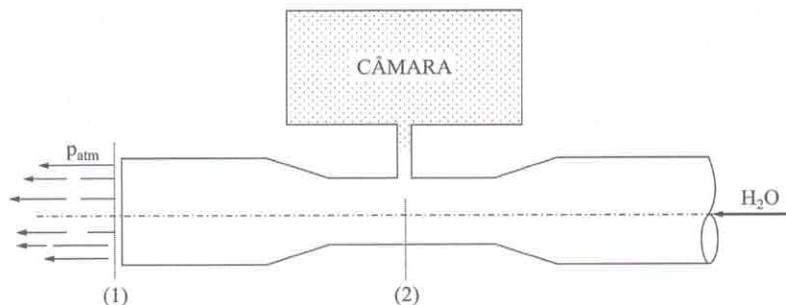
4.8 No conduto da figura, o fluido é considerado ideal. Dados:  $H_1 = 16$  m;  $p_1 = 52$  kPa;  $\gamma = 10^4$  N/m<sup>3</sup>;  $D_1 = D_3 = 10$  cm. Determinar:

- a) a vazão em peso;
- b) a altura  $h_1$  no manômetro;
- c) o diâmetro da seção (2).



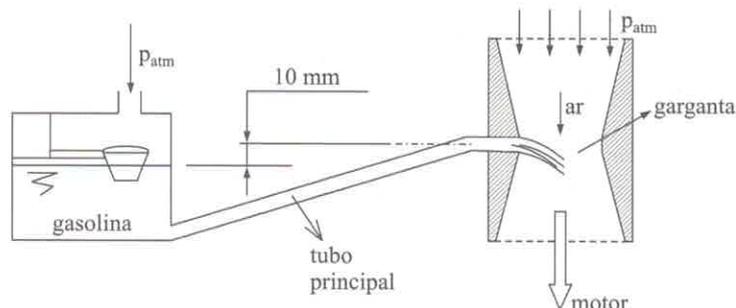
Resp.: a)  $Q_C = 314$  N/s; b)  $h_1 = 0$ ; c)  $D_2 = 5,7$  cm

4.9 Um dos métodos para se produzir vácuo numa câmara é descarregar água por um tubo convergente-divergente, como é mostrado na figura. Qual deve ser a vazão em massa de água pelo convergente-divergente, para produzir uma depressão de 22 cm de mercúrio na câmara da figura? Dados: desprezar as perdas de carga;  $\gamma_{H_2O} = 10^4$  N/m<sup>3</sup>;  $\gamma_{Hg} = 1,36 \times 10^5$  N/m<sup>3</sup>;  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;  $D_1 = 72$  mm;  $D_2 = 36$  mm.



Resp.:  $Q_m = 8,14$  kg/s

- 4.10 Num carburador, a velocidade do ar na garganta do Venturi é 120 m/s. O diâmetro da garganta é 25 mm. O tubo principal de admissão de gasolina tem um diâmetro de 1,15 mm e o reservatório de gasolina pode ser considerado aberto à atmosfera com seu nível constante. Supondo o ar como fluido ideal e incompressível e desprezando as perdas no tubo de gasolina, determinar a relação gasolina/ar (em massa) que será admitida no motor. Dados:  $\rho_{\text{gas}} = 720 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_{\text{ar}} = 1 \text{ kg/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

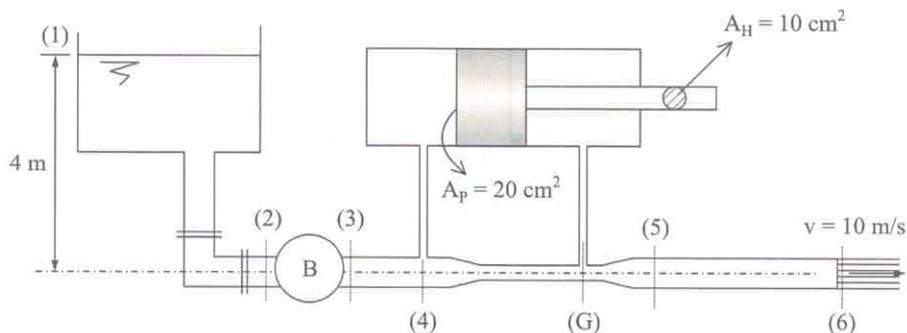


Resp.: 0,0565

- 4.11 Desprezando os atritos no pistão da figura, determinar:

- a potência da bomba em kW se seu rendimento for 80%;
- a força que o pistão pode equilibrar com a haste.

Dados:  $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 10 \text{ cm}^2$ ;  $A_{G_3} = 8 \text{ cm}^2$ ;  $A_P = 20 \text{ cm}^2$ ;  $A_h = 10 \text{ cm}^2$ ;  $H_{P1,2} = H_{P3,4} = 0,5 \text{ m}$ ;  $H_{P4,5} = 0 \text{ m}$ ;  $H_{P5,6} = 1 \text{ m}$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ . Supor o cilindro no plano da tubulação.

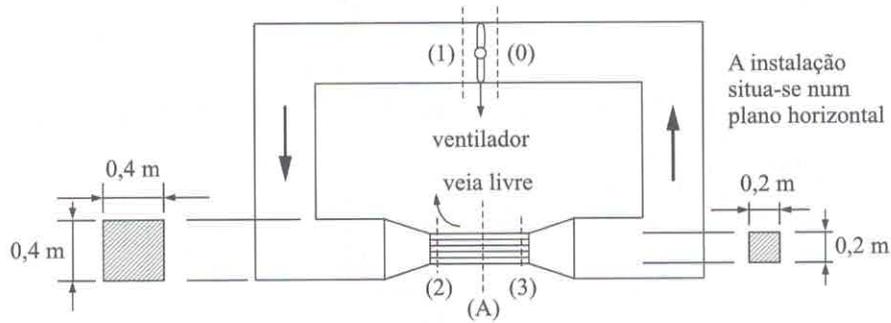


Resp.: a) 0,375 kW; b) 38,1 N

- 4.12 Um túnel aerodinâmico foi projetado para que na seção de exploração A a veia livre de seção quadrada de 0,2 m de lado tenha uma velocidade média de 30 m/s. As perdas de carga são:

- entre A e 0  $\rightarrow$  100 m;
- entre 1 e A  $\rightarrow$  100 m.

Calcular a pressão nas seções 0 e 1 e a potência do ventilador se seu rendimento é 70%. ( $\gamma_{\text{ar}} = 12,7 \text{ N/m}^3$ )



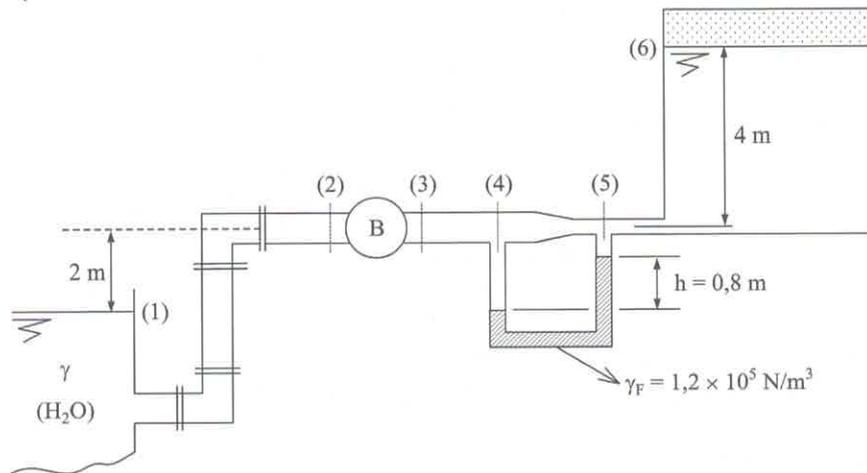
Resp.:  $p_0 = -734 \text{ Pa}$ ;  $p_1 = 1.806 \text{ Pa}$ ;  $N_V = 4,4 \text{ kW}$

4.13 Sabendo que a potência da bomba é 3 kW, seu rendimento 75% e que o escoamento é de (1) para (2), determinar:

- a) a vazão;
- b) a carga manométrica da bomba;
- c) a pressão do gás.

Dados:  $H_{p1,2} = H_{p5,6} = 1,5 \text{ m}$ ;  $H_{p3,4} = 0,7 \text{ m}$ ;

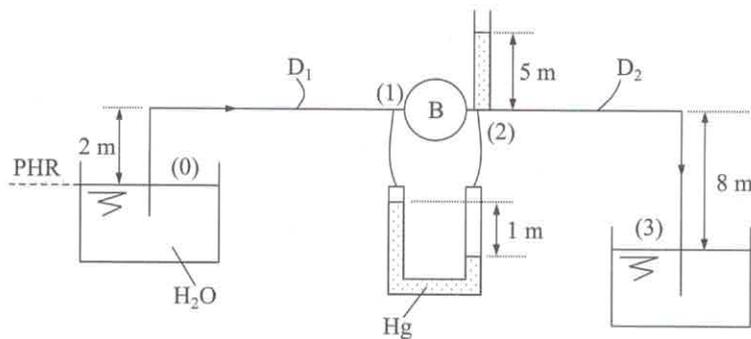
$H_{p4,5} = 0$ ;  $3A_5 = A_4 = 100 \text{ cm}^2$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ .



Resp.: a) 47 L/s; b) 4,8 m; c) -49 kPa

4.14 Na instalação da figura, a carga total na seção (2) é 12 m. Nessa seção, existe um piezômetro que indica 5 m. Dados:  $\gamma_{H_2O} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $\gamma_{Hg} = 1,36 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ ;  $h = 1 \text{ m}$ ;  $D_1 = 6 \text{ cm}$ ;  $D_2 = 5 \text{ cm}$ ;  $\eta_B = 0,8$ . Determinar:

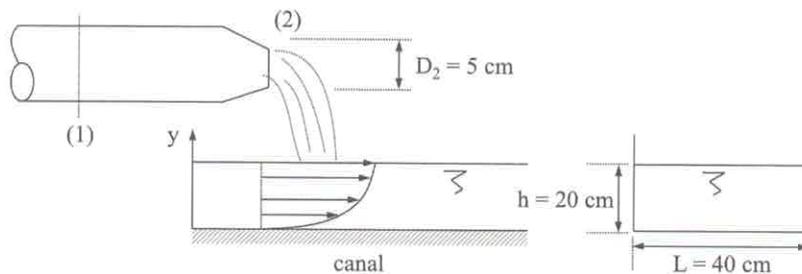
- a) a vazão;
- b) a pressão em (1);
- c) a perda de carga ao longo de toda a tubulação;
- d) a potência que o fluido recebe da bomba.



Resp.: a) 19,6 L/s; b) -76 kPa; c) 21,2 m; d) 3 kW

4.15 O bocal da figura descarrega 40 L/s de um fluido de  $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $\gamma = 8.000 \text{ N/m}^3$  no canal de seção retangular. Determinar:

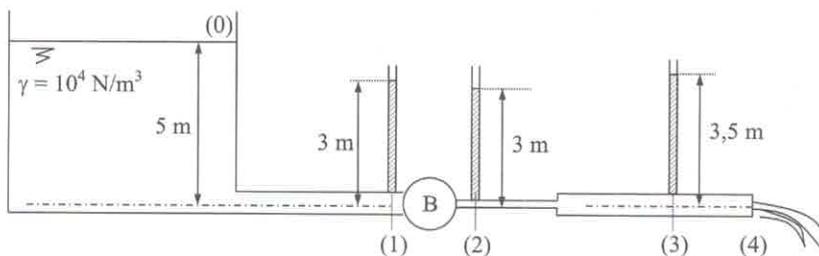
- a) a velocidade média do fluido no canal;
- b) o mínimo diâmetro da seção (1) para que o escoamento seja laminar;
- c) a perda de carga de (1) a (2) no bocal, quando o diâmetro é o do item (b), supondo  $p_1 = 0,3 \text{ Mpa}$ ;
- d) a velocidade máxima no canal, se o diagrama é do tipo  $v = ay^2 + by + c$ , com  $dv/dy = 0$  na superfície do canal (vide figura).



Resp.: a) 0,5 m/s; b) 0,255 m; c) 16,8 m; d) 0,75 m/s

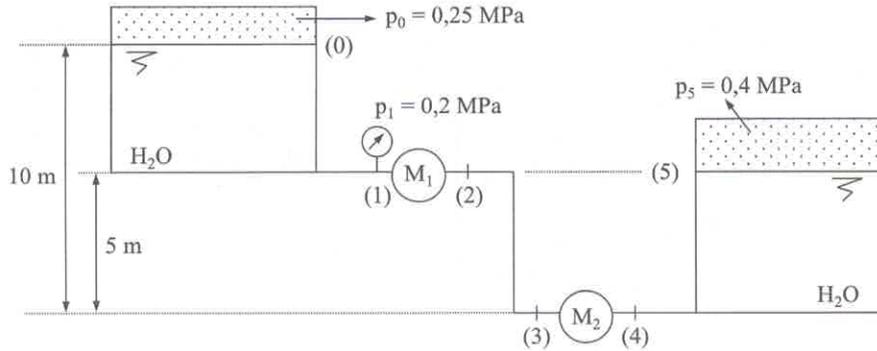
4.16 Dados:  $H_{p,2,3} = 2 \text{ m}$ ;  $A_3 = 20 \text{ cm}^2$ ;  $A_2 = 1 \text{ cm}^2$ ;  $H_{p,0,1} = 0,8 \text{ m}$ ;  $\eta_B = 70\%$ . Determinar:

- a) a vazão (L/s);
- b) a área da seção (1) (cm<sup>2</sup>);
- c) a potência fornecida pela bomba ao fluido.



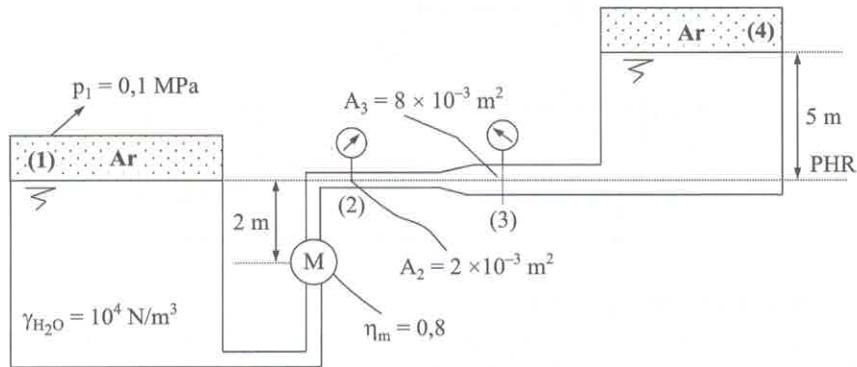
Resp.: a) 0,71 L/s; b) 1,45 cm<sup>2</sup>; c) 9,4 W

- 4.17 Na instalação da figura, a máquina  $M_2$  fornece ao fluido uma energia por unidade de peso de 30 m e a perda de carga total do sistema é 15 m. Determinar:
- a potência da máquina  $M_1$ , sendo  $\eta_{m1} = 0,8$ ;
  - a pressão na seção (2) em mca;
  - a perda de carga no trecho (2)-(5) da instalação.
- Dados:  $Q = 20 \text{ L/s}$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $A = 10 \text{ cm}^2$  (área da seção dos tubos).



Resp.: a)  $N_T = 4 \text{ kW}$ ; b) 45 mca; c) 5 m

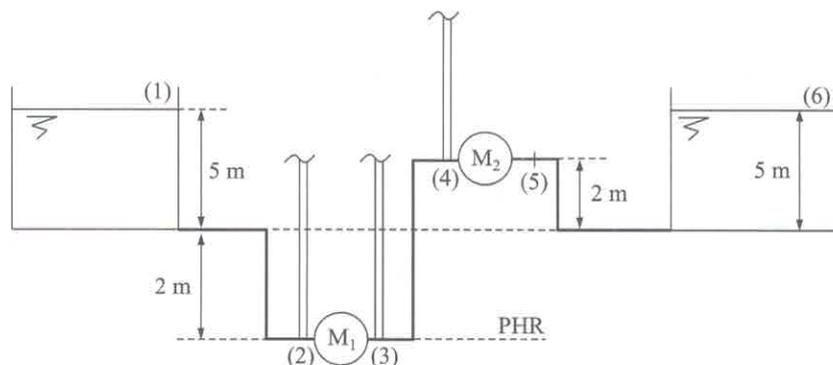
- 4.18 Na instalação da figura, a vazão de água na máquina é  $16 \text{ L/s}$  e tem-se  $H_{p1,2} = H_{p3,4} = 1 \text{ m}$ . O manômetro na seção (2) indica 200 kPa e o da seção (3) indica 400 kPa. Determinar:
- o sentido do escoamento;
  - a perda de carga no trecho (2)-(3);
  - o tipo de máquina e a potência que troca com o fluido em kW;
  - a pressão do ar em (4) em MPa.



Resp.: a) (4) para (1); b) 17 m; c) turbina; 1,95 kW; d) 0,362 MPa

- 4.19 Na instalação da figura são dados:
- área da seção das tubulações:  $A = 10 \text{ cm}^2$  (constante)
  - piezômetro (2):  $h_2 = 7 \text{ m}$
  - piezômetro (3):  $h_3 = 11 \text{ m}$
  - piezômetro (4):  $h_4 = 9 \text{ m}$
  - perda de carga no trecho (1)-(2) = 1,8 m e no trecho (5)-(6) = 2 m
  - $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$   $\text{kgf/m}^3$ ;  $\eta_{M1} = 80\%$ ;  $\eta_{M2} = 70\%$ . Determinar:

- o sentido do escoamento (justificar);
- a vazão (L/s);
- o tipo de máquina  $M_1$  e sua potência;
- o tipo de máquina  $M_2$  e a potência trocada com o fluido.

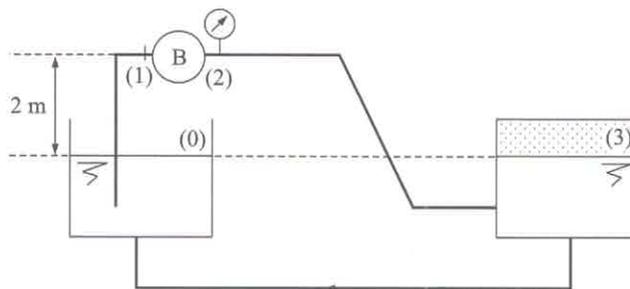


Resp.: a) (6)-(1); b) 6 L/s; c)  $N_T = 0,192$  kW; d)  $N_B = 0,59$  kW

4.20 Na instalação da figura, os reservatórios são de pequenas dimensões, mas o nível mantém-se constante.

- Qual é a vazão na tubulação que une a parte inferior dos dois tanques?
- Para que aconteça essa vazão, qual a pressão em (3)?
- Qual é a perda de carga na tubulação inferior dos dois tanques?

Dados: potência recebida pelo fluido da bomba  $N = 1,5$  kW;  $D_1 = 4$  cm;  $D_1 \neq D_2$ ;  $p_1 = 50$  kPa (abs);  $p_{atm} = 100$  kPa;  $H_{p0,1} = 2$  m;  $H_{p2,3} = 4$  m;  $\gamma = 10^4$  N/m<sup>3</sup>.

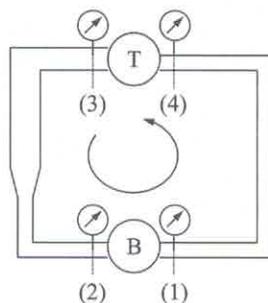


Resp.: a) 5,62 L/s; b) 0,207 MPa; c) 20,7 m

4.21 No circuito da figura instalado num plano horizontal, tem-se  $p_1 = 0,3$  MPa;  $p_2 = 0$ ;  $p_3 = 0,1$  MPa;  $N_T = 6$  kW;  $\eta_T = 0,75$ ;  $A_1 = A_2 = A_4 = 80$  cm<sup>2</sup>;  $A_3 = 100$  cm<sup>2</sup>;  $\gamma = 10^4$  N/m<sup>3</sup>.

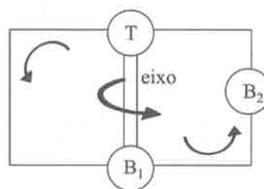
A potência que o fluido recebe da bomba é o dobro da potência da turbina. Determinar:

- a vazão;
- a perda de carga no trecho da direita;
- a leitura do manômetro (4);
- a perda de carga no trecho da esquerda.



Resp.: a) 40 L/s; b) 0,45 m; c) 0,295 MPa; d) 9,55 m

4.22 No circuito da figura, a bomba  $B_1$  é acionada pela turbina. A vazão é 30 L/s e os rendimentos da turbina e da bomba  $B_1$  são, respectivamente, 0,7 e 0,8. A perda de carga na tubulação é 15 m. Sabendo que o fluido ( $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ) recebe da bomba  $B_2$  uma potência de 6 kW, determinar a potência que o fluido cede à turbina.



Resp.:  $N = 3,4 \text{ kW}$

4.23 Determinar o coeficiente  $\alpha$  da energia cinética para o escoamento de um líquido num tubo de seção circular. O escoamento é laminar e o diagrama de velocidades é  $v = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$ .

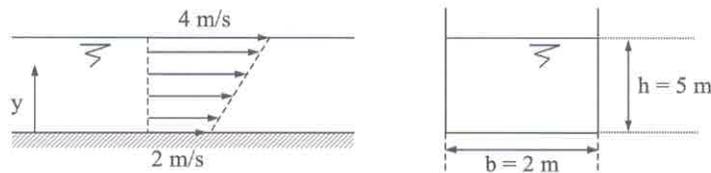
Resp.:  $\alpha = 2$

4.24 Determinar o coeficiente  $\alpha$  da energia cinética para o escoamento turbulento de um líquido num tubo de seção circular. O diagrama de velocidades é  $v = v_{\max} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7}$ .

Resp.:  $\alpha = 1,06$

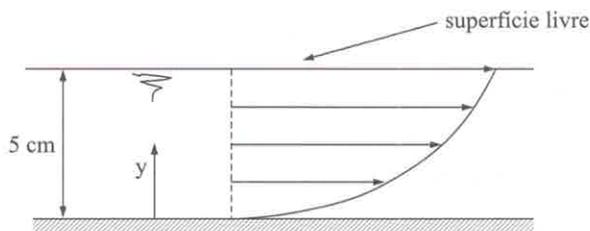
4.25 É dado um diagrama bidimensional de velocidades de um fluido ideal, num canal de largura 2 m:

- Qual é a velocidade média na seção?
- Qual é a vazão em volume?
- Qual é o coeficiente  $\alpha$  da energia cinética?
- Qual é o fluxo da energia cinética, se  $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ?
- Qual é a carga cinética?



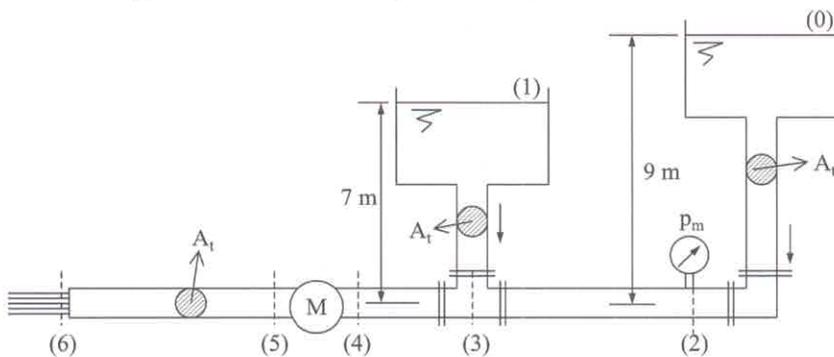
Resp.: a) 3 m/s; b) 30 m<sup>3</sup>/s; c) 1,11; d) 149.850 W; e) 0,5 m

- 4.26 O esquema da figura corresponde à seção longitudinal de um canal de 25 cm de largura. Admite-se que a velocidade é invariável ao longo da normal ao plano do esquema, sendo variável com  $y$  através de  $v = 30y - y^2$  ( $y$  em cm e  $v$  em cm/s). Sendo o fluido de peso específico  $9 \text{ N/L}$ , viscosidade cinemática  $70 \text{ cSt}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determinar:
- o gradiente de velocidade para  $y = 2 \text{ cm}$ ;
  - a máxima tensão de cisalhamento na seção em  $\text{N/m}^2$ ;
  - a velocidade média na seção em  $\text{cm/s}$ ;
  - a vazão em massa na seção em  $\text{kg/h}$ ;
  - o coeficiente da energia cinética ( $\alpha$ ) na seção.



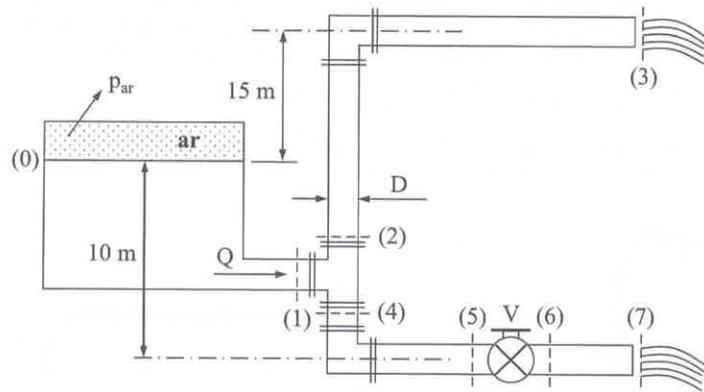
Resp.: a)  $26 \text{ s}^{-1}$ ; b)  $1,9 \text{ N/m}^2$ ; c)  $0,67 \text{ m/s}$ ; d)  $27.135 \text{ kg/h}$ ; e)  $1,73$

- 4.27 Sabendo que a vazão proporcionada pelo tanque inferior da instalação é igual a  $15 \text{ L/s}$  e que a potência dissipada por atritos em toda a instalação é  $1 \text{ kW}$ , determinar o tipo da máquina e sua potência. Dados:  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $H_{p0,2} = 4,8 \text{ m}$ ;  $A_t = 100 \text{ cm}^2$ ;  $p_m = 40 \text{ kPa}$ ;  $\eta_m = 80\%$ .



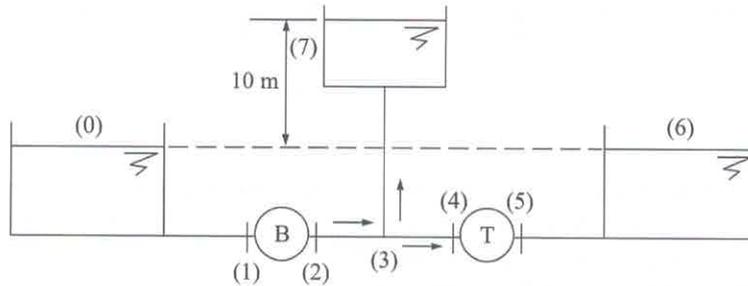
Resp.: Turbina  $N_T = 1,31 \text{ kW}$

- 4.28 A figura está num plano vertical. Calcular a perda de carga que deve ser introduzida pela válvula V da figura para que a vazão se distribua igualmente nos dois ramais, cujos diâmetros são iguais. Dados:  $D = 5 \text{ cm}$ ;  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $p_{\text{ar}} = 0,2 \text{ MPa}$ ;  $Q = 10 \text{ L/s}$ ;  $H_{p0,1} = 2 \text{ m}$ ;  $H_{p1,2,4} = 0$ ;  $H_{p2,3} = 3 \text{ m}$ ;  $H_{p4,5} = 3 \text{ m}$ ;  $H_{p6,7} = 2 \text{ m}$ .



Resp.:  $H_{pV} = 22,4 \text{ m}$

4.29 No sistema da figura, a bomba deve fornecer 10 L/s ao reservatório superior e a turbina deve ter uma potência no eixo de 3 kW com um rendimento de 80%. Qual é a carga manométrica da bomba e a da turbina? Dados:  $H_{p0,1} = 2 \text{ m}$ ;  $H_{p2,3} = 4 \text{ m}$ ;  $H_{p3,4} = 4 \text{ m}$ ;  $H_{p5,6} = 4 \text{ m}$ ;  $H_{p3,7} = 2 \text{ m}$ ;  $H_{p3} \equiv 0$ ;  $N_B = 7,5 \text{ kW}$ ;  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $\eta_B = 0,8$ .

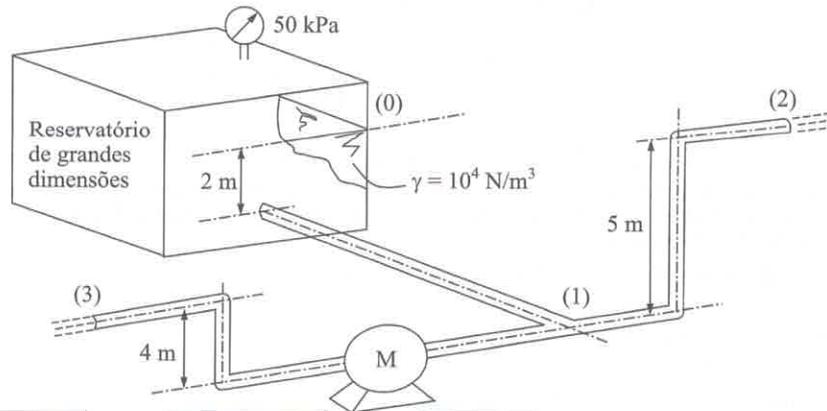


Resp.:  $H_T = 117,2 \text{ m}$ ;  $H_B = 45,5 \text{ m}$

4.30 Na instalação da figura, todas as tubulações são de diâmetro muito grande em face da vazão, o que torna desprezível a carga cinética. Determinar:

- a) o tipo de máquina e a sua carga manométrica;
- b) a vazão em volume proveniente do reservatório;

Dados:  $Q_2 = Q_3$ ;  $H_{p0,1} = 1 \text{ m}$ ;  $H_{p1,2} = 1 \text{ m}$ ;  $H_{p1,3} = 4 \text{ m}$ ;  $\eta_m = 80\%$ ; potência no eixo da máquina = 0,7 kW

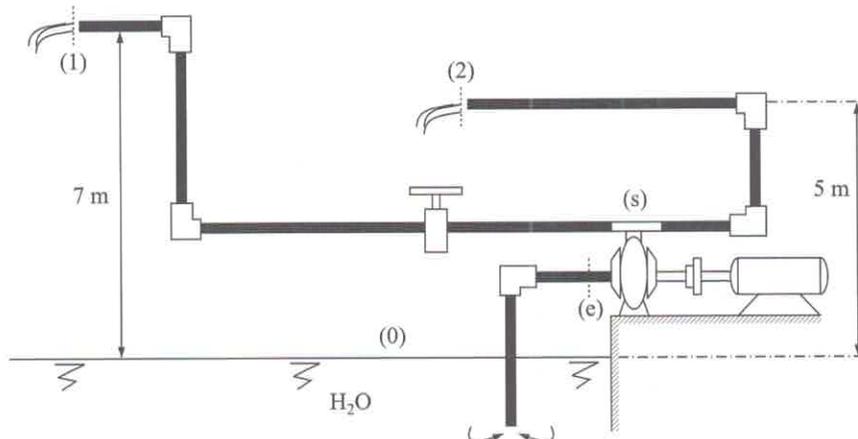


Resp.: a) bomba ( $H_B = 2 \text{ m}$ ); b)  $Q_0 = 56 \text{ L/s}$

- 4.31 Na instalação da figura, todas as tubulações são de mesmo diâmetro ( $D = 138 \text{ mm}$ ); o registro é ajustado para que a vazão pela seção (1) seja a metade da vazão pela seção (2). Para tal condição, a altura manométrica da bomba vale  $8 \text{ m}$  e as perdas de carga valem, respectivamente:

$$H_{p_{0,e}} = \frac{1}{3} (v_e^2 / 2g); H_{p_{s,1}} = 5 (v_1^2 / 2g); H_{p_{s,2}} = 1,5 (v_2^2 / 2g)$$

Desprezando a perda de carga no 'T' na saída da bomba, determinar sua potência, sendo seu rendimento  $48\%$ . ( $\gamma_{H_2O} = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

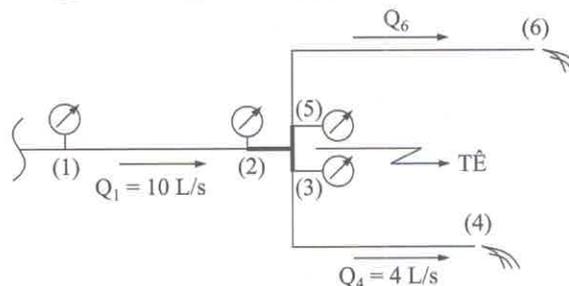


Resp.:  $N_B = 15 \text{ kW}$

- 4.32 No trecho da instalação da figura, que está num plano horizontal, determinar:

- a leitura no manômetro (2) para que se possa considerar a perda de carga desprezível no TÊ;
- a perda de carga de (1) a (2), (5) a (6) e (3) a (4);
- a potência dissipada em todo o conjunto em kW.

Dados:  $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $p_1 = 0,2 \text{ MPa}$ ;  $p_3 = 0,15 \text{ MPa}$ ;  $p_5 = 0,1 \text{ MPa}$ ;  $A = 10 \text{ cm}^2$  (área da seção das tubulações).

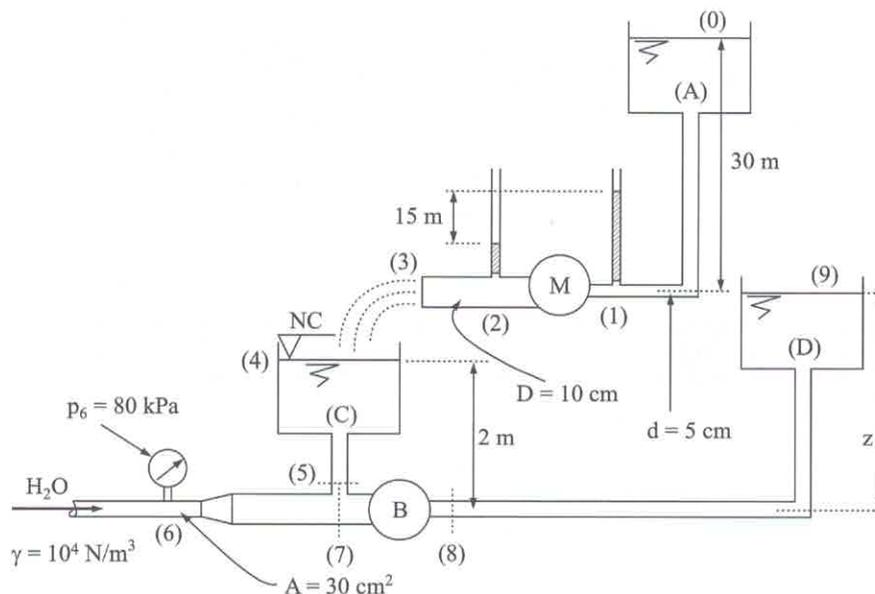


Resp.: a)  $p_2 = 84 \text{ kPa}$ ; b)  $H_{p_{1,2}} = 11,6 \text{ m}$ ;  $H_{p_{3,4}} = 15 \text{ m}$ ;  $H_{p_{5,6}} = 10 \text{ m}$ ; c)  $2,36 \text{ kW}$

- 4.33 Os tanques A e D são de grandes dimensões e o tanque C é de pequenas dimensões, mas o nível (4) permanece constante. A bomba B, que tem  $\eta_B = 80\%$ , recebe  $11 \text{ kW}$  do motor elétrico e tem carga manométrica de  $20 \text{ m}$ . Determinar:

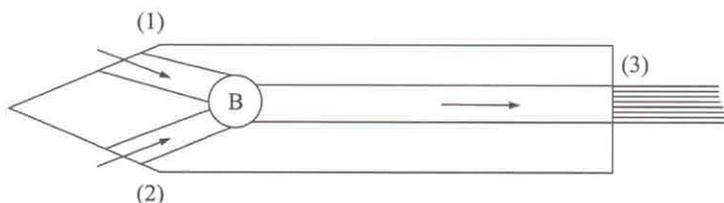
- o tipo de máquina M e a sua carga manométrica;
- a vazão no trecho (4)-(5) ( $Q_2$ ) (L/s);
- a vazão que passa na bomba B (L/s);
- a cota  $z$  (m).

Dados:  $H_{p_{0,3}} = 3 \text{ m}$ ;  $H_{p_{4,5}} = 0 \text{ m}$ ;  $H_{p_{6,7}} = 2 \text{ m}$ ;  $H_{p_{8,9}} = 10 \text{ m}$ .



Resp.: a)  $H_T = 26,3 \text{ m}$ ; b)  $Q_c = 30,4 \text{ L/s}$ ; c)  $Q_B = 44 \text{ L/s}$ ; d)  $z = 13,6 \text{ m}$

4.34 O sistema de propulsão de um barco consta de uma bomba que recolhe água na proa através de dois tubos de 5 cm de diâmetro e a lança na popa por um tubo com o mesmo diâmetro. Calcular a potência da bomba, sabendo que a vazão em cada conduto de entrada é 25 L/s, a potência dissipada pelos atritos é 0,44 kW e o rendimento é  $\eta_B = 0,75$ .



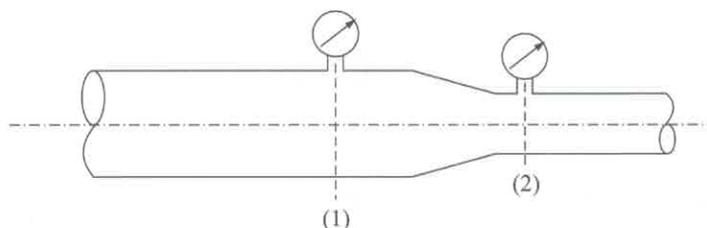
Resp.:  $N_B = 16,6 \text{ kW}$

4.35 Ar escoia isotermicamente por um tubo longo, horizontal, de diâmetro constante. Numa seção em que a pressão é de 1 MPa (abs), a velocidade é 25 m/s. Por causa do atrito no escoamento, a pressão numa seção distante da anterior é 0,2 MPa (abs).

- Qual o aumento da carga cinética?
- Qual a troca de calor em kJ/kg para que a temperatura seja mantida constante?

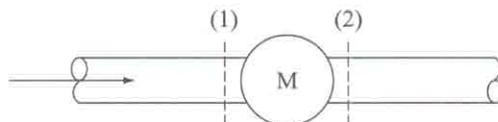
Resp.: a)  $\Delta \frac{v^2}{2g} = 750 \text{ m}$ ; b)  $q = 7,5 \text{ kJ/kg}$

4.36 No convergente da figura escoia ar considerado gás perfeito. Sendo  $A_1 = 0,1 \text{ m}^2$ ;  $A_2 = 0,05 \text{ m}^2$ ;  $p_1 = 0,2 \text{ MPa}$  (abs);  $p_2 = 0,1 \text{ MPa}$  (abs) e  $\rho_1 = 1 \text{ kg/m}^3$ , determinar o calor trocado entre (1) e (2) por unidade de tempo (fluxo de calor), sabendo que a vazão em volume na seção (1) é  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  e que o escoamento é isotérmico. Dizer se o calor é retirado ou fornecido. (Justificar.)



Resp.: 0,75 kW

- 4.37 Na máquina da figura, são dados:  $v_1 = 4 \text{ m/s}$ ;  $A_1 = 0,52 \text{ m}^2$ ;  $A_2 = 0,4 \text{ m}^2$ ;  $p_1 = p_2 = 0,1 \text{ MPa}$ . O escoamento é isotérmico, a potência fornecida ao fluido compressível pela máquina é 10 kW e o fluxo de calor perdido para o exterior é 0,98 kW. Qual é a vazão em massa através da máquina?

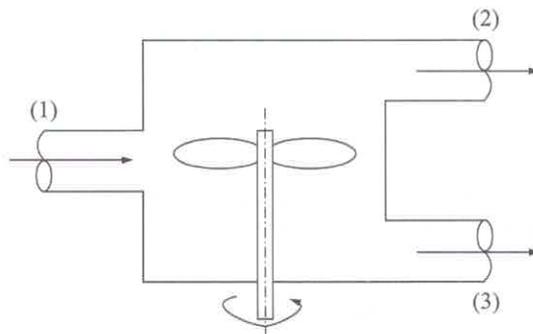


Resp.:  $Q_m = 1.634 \text{ kg/s}$

- 4.38 Uma turbina a vapor consome 4.500 kg/h de vapor e recebe dele 736 kW. As velocidades de entrada e saída do vapor são, respectivamente, 60 m/s e 275 m/s, e as entalpias, 2.760 kJ/kg e 2.090 kJ/kg. Calcular a perda de calor através da carcaça em kW.

Resp.: 56 kW

- 4.39 A figura mostra uma máquina hidráulica por onde escoava água, isotermicamente. Desprezando as diferenças de cotas, determinar o tipo de máquina e o seu rendimento. Dados:  $A_1 = 0,5 \text{ m}^2$ ;  $A_2 = 0,2 \text{ m}^2$ ;  $A_3 = 0,25 \text{ m}^2$ ;  $p_1 = 0,2 \text{ MPa (abs)}$ ;  $p_2 = p_3 = 0,3 \text{ MPa (abs)}$ ;  $Q_1 = 2,5 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ ; calor perdido = 14,7 kW. (Aproveitar o exercício para induzir a equação geral, para regime permanente, para diversas entradas e saídas.)



Resp.: Bomba com  $\eta_B = 0,95$